

---

# ÉQUIVALENCE RATIONNELLE, ÉQUIVALENCE NUMÉRIQUE ET PRODUITS DE COURBES ELLIPTIQUES SUR UN CORPS FINI

*par*

Bruno Kahn

---

**Abstract.** — We prove that if  $X$  is a product of elliptic curves over a finite field  $k$ , rational and numerical equivalences agree on  $X$ . The proof works for any smooth projective variety  $X$  “of abelian type” for which the Tate conjecture holds (the case of products of elliptic curves being due to M. Spieß’s [55]). It uses Soulé’s ideas [53], U. Jannsen’s semi-simplicity theorem [22], and a result of Y. André and the author [1] inspired by S.I. Kimura’s results on finite-dimensional Chow motives [35]. We give some consequences, among which : the conjectures of Lichtenbaum [42, §7] hold true for  $X$ , the second Chow group of  $X$  is finitely generated, the Beilinson-Soulé conjecture holds in weight  $n$  for the function field of  $X$  provided  $n \leq 2$  or  $\dim X \leq 2$ , Gersten’s conjecture holds for discrete valuation rings with residue field such a function field if  $\dim X \leq 2$ . Also, if  $U$  is an open subset of  $X$  with  $\dim X \leq 2$ , the action of Frobenius on  $H_c^*(U, \mathbf{Q}_l)$  is semi-simple and its characteristic polynomial does not depend on  $l \neq \text{char } k$ .

## Introduction

Soient  $k$  un corps fini de caractéristique  $p$  et  $G = \text{Gal}(\bar{k}/k)$ . Dans un article séminal [53, th. 4 i)], Soulé démontre que pour toute variété projective lisse  $X$  de dimension  $\leq 3$  et “de type abélien” (par exemple une variété abélienne ou un produit de courbes), l’application “classe de cycle  $l$ -adique”

$$(*) \quad CH^i(X) \otimes \mathbf{Q}_l \rightarrow H^{2i}(\bar{X}, \mathbf{Q}_l(i))^G$$

est bijective pour tout nombre premier  $l \neq p$  et tout  $i \geq 0$ . Ceci est un cas particulier de deux conjectures fondamentales en géométrie arithmétique :

la conjecture de Tate [57] (surjectivité de (\*)) et la conjecture de Beilinson [2, 1.0]<sup>(1)</sup> (injectivité de (\*)). La démonstration consiste à considérer la décomposition motivique de  $X$  pour se réduire au théorème de Tate sur les endomorphismes de variétés abéliennes [58] et à l’hypothèse de Riemann sur  $k$  (Deligne [10]).

La conjecture de Tate est maintenant démontrée pour un bon nombre de variétés abéliennes sur  $k$  (voir ci-dessous). La situation est différente pour la conjecture de Beilinson, qui n’est connue grosso-modo qu’en codimension 1 (où elle est triviale); elle est d’ailleurs utilisée par Soulé dans ce cas pour obtenir (\*). Dans le présent article, nous utilisons une idée nouvelle de S.I. Kimura [35] pour la démontrer en toute codimension dans un certain nombre de cas nouveaux.

Plus précisément, notant  $\mathcal{A}(k) = \mathcal{A}$  la catégorie des motifs de Chow sur  $k$  à coefficients rationnels :

**Définition 1.** — a) Soit  $B(k)$  l’ensemble des classes d’isomorphismes de  $k$ -variétés projectives lisses dont le motif de Chow est dans la sous-catégorie épaisse rigide de  $\mathcal{A}$  engendrée par les motifs d’Artin et les motifs de variétés abéliennes (ou de courbes, c’est la même chose).

b) Soit  $B_{\text{tate}}(k) \subset B(k)$  le sous-ensemble des variétés  $X$  vérifiant la conjecture de Tate (pour un nombre premier  $l \neq p$  donné : cela ne dépend pas de  $l$ , cf. [58, Th. 2.9] puisque Frobenius opère de manière semi-simple sur la cohomologie  $l$ -adique de  $X$ ).

**Exemples 1.** — a)  $B(k)$  contient l’ensemble  $A(k)$  défini dans [53, 3.3.1].

b)  $B_{\text{tate}}(k)$  contient les  $X \in B(k)$  avec  $\dim X \leq 3$  (Soulé, voir ci-dessus) et les produits de courbes elliptiques [55].

c) Milne a démontré que la conjecture de Hodge pour les variétés abéliennes complexes de type  $CM$  implique la conjecture de Tate pour les variétés abéliennes sur  $k$  [49]. Inconditionnellement, les résultats de [50] montrent qu’on peut prouver la conjecture de Tate pour “beaucoup” de variétés abéliennes  $A$  sur  $k$ . C’est le cas si l’algèbre des “cycles de Tate” de  $A$  est engendrée en degré 1, par réduction au théorème de Tate [58]. C’est ainsi que Spieß démontre la conjecture de Tate pour les produits de courbes elliptiques. D’autres exemples sont les puissances de variétés abéliennes simples “de type K3” de Zarhin [64] ou “presque ordinaires” de Lenstra-Zarhin [38], cf. [50, A.7, exemples]. Pour un exemple où cette condition n’est pas vérifiée mais où néanmoins la conjecture de Tate est démontrée, voir [50, ex. 1.8].

<sup>(1)</sup>Mais aussi de Lichtenbaum en conjonction avec la conjecture de Tate, cf. [42, §7, 7)].

d) Un exemple amusant de nature très légèrement différente est celui d'une hypersurface de Fermat

$$X : X_0^m + \cdots + X_{d+1}^m = 0$$

où  $m$  est tel que  $q^\nu \equiv -1 \pmod{m}$  pour un  $\nu$  convenable (Tate, Katsura-Shioda, [57, 33]).

**Théorème 1 (cf. th. 1.8).** — *Pour tout  $X \in B_{\text{tate}}(k)$ , l'équivalence rationnelle est égale à l'équivalence numérique (à coefficients rationnels) sur  $X$ .*

Dans [29], nous avons montré que la conjonction des conjectures de Tate et de Beilinson a des implications considérables. Dans cet esprit, nous tirons les conséquences suivantes du théorème 1. Soient  $X \in B_{\text{tate}}(k)$ ,  $d = \dim X$  et  $K = k(X)$ .

**Corollaire 1 (cor. 3.10).** — *Les conjectures de Lichtenbaum [42, §7] sont vraies pour  $X$ .*

**Corollaire 2 (th. 4.5).** — *Pour tout ouvert  $U$  de  $X$ , les groupes  $H^0(U, \mathcal{K}_2)$ ,  $H^1(U, \mathcal{K}_2)$  et  $H^2(U, \mathcal{K}_2) = CH^2(U)$  sont de type fini. Le groupe  $K_3(K)_{\text{ind}}$  est égal à  $K_3(k)$ .*

**Corollaire 3 (cor. 2.3).** — *La conjecture de Beilinson-Soulé est vraie en poids  $n$  pour  $K$  pourvu que  $n \leq 2$  ou que  $d \leq 2$ .*

À ma connaissance, ce sont les premiers exemples non triviaux (au-delà de la dimension 1) où cette conjecture est explicitement démontrée. Toutefois, pour  $d = 2$  ou pour  $n = 2, d = 3$ , les résultats de [53] suffiraient (voir [53, th. 4 iii]) et la démonstration du corollaire 2.3).

**Corollaire 4 (th. 4.6).** — *Si  $d = 2$ , on a des isomorphismes canoniques pour tout  $n \geq 0$*

$$\left( K_n^M(K) \oplus \bigoplus_{0 \leq i \leq n-1} H^{2i-n-1}(K, (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(i)) \right) \otimes \mathbf{Z}_{(2)} \xrightarrow{\sim} K_n(K) \otimes \mathbf{Z}_{(2)}$$

où  $(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(i) = \varinjlim_{(m, \text{car } k)=1} \mu_m^{\otimes i}$ .

Si l'on fait "tendre  $k$  vers l'infini" dans le théorème 4, on obtient une confirmation partielle d'une conjecture de Suslin [56, conj. 4.1 et note] : si un corps  $F$  contient un corps algébriquement clos  $\bar{k}$ ,  $K_*(F)$  est engendré multiplicativement par  $K_1(F)$  et  $K_*(F_0)$  (corollaire 4.7 et remarque 4.8). Ce résultat est faux en caractéristique zéro d'après de Jeu [23].

**Corollaire 5 (cor. 2.4).** — Supposons  $d = 2$ , et soit  $A$  un anneau de valuation discrète de corps des fractions  $E$  et de corps résiduel  $K$ . Alors la conjecture de Gersten est vraie pour la  $K$ -théorie algébrique de  $A$  : pour tout  $n \geq 0$ , la suite

$$0 \rightarrow K_{n+1}(A) \rightarrow K_{n+1}(E) \rightarrow K_n(K) \rightarrow 0$$

est exacte.

**Corollaire 6 (prop. 5.16).** — Supposons  $d = 2$ , et soit  $U$  un ouvert de  $X$ . Alors, pour tout  $l \neq p$ , l'action de Frobenius sur  $H_c^*(\bar{U}, \mathbf{Q}_l)$  est semi-simple. De plus, le polynôme caractéristique de cette action est indépendant de  $l$ .

Le corollaire 6 est conjecturé (Grothendieck, Serre) pour tout  $k$ -schéma de type fini  $U$ . Gabber m'en a indiqué une démonstration directe. La démonstration donnée ici consiste à montrer que le motif à supports compacts de  $U$  dans la catégorie triangulée des motifs  $DM_{\text{gm}}(k) \otimes \mathbf{Q}$  de Voevodsky [60] est somme directe de motifs purs d'écarts ; elle peut servir de modèle pour une démonstration future du corollaire 6 en général.

Pour obtenir les corollaires 1 et 2, nous prouvons des résultats plus précis faisant intervenir une nouvelle cohomologie introduite par Lichtenbaum [43] (corollaire 3.8).

La démonstration du théorème 1 utilise trois ingrédients de manière essentielle : le fait que la conjecture de semi-simplicité est vraie pour la cohomologie  $l$ -adique de  $X$ , la semi-simplicité de la catégorie des motifs modulo l'équivalence numérique due à Jannsen [22] et un raffinement d'un résultat de Kimura [35, prop. 7.5] dû à André et à l'auteur [1, prop. 9.1.14]. La technique de démonstration, quant à elle, remonte à Soulé [53] via Geisser [14].

Le corollaire 1 se déduit du théorème 1 de manière relativement classique [46, 47] ; toutefois, l'introduction de la cohomologie de Lichtenbaum mentionnée ci-dessus simplifie bien les choses. Il faut un peu d'effort pour déduire la version "globale" des conjectures de Lichtenbaum de leur version localisée en chaque nombre premier : à cet égard, le lemme 3.9 est fort utile.

Le corollaire 3, quant à lui, se déduit assez facilement du résultat de Geisser selon lequel la conjugaison des conjectures de Tate et de Beilinson implique la conjecture de Parshin (cf. corollaire 2.2).

La méthode de démonstration du théorème 1 et du corollaire 1 conduit à de nouvelles formulations des trois conjectures dont nous avons démontré l'équivalence dans [31, th. 3.4] : voir théorème 6.2.

Cet article est construit comme suit. Au §1, nous démontrons le théorème 1. Dans les paragraphes suivants, nous "tirons les marrons du feu" : cette

opération demande à l’occasion le port de gants ignifuges. Comme indiqué ci-dessus, les conséquences que nous donnons sont toutes des cas particuliers de conséquences des trois conjectures équivalentes de [31, th. 3.4], dont beaucoup ont été déjà dégagées dans [29] : nous nous sommes efforcé de rédiger les démonstrations de telle manière qu’elles puissent être reproduites telles quelles quand ces conjectures seront démontrées.

Au §2 nous donnons les conséquences les plus immédiates du théorème 1, dont les corollaires 3 et 5. Au §3, nous introduisons la cohomologie de Lichtenbaum (à coefficients dans les complexes de cycles de Bloch), étendons les classes de cycles motiviques  $l$ -adiques de [31] ( $l \neq p = \text{car } k$ ) en des classes émanant de la cohomologie de Lichtenbaum motivique et construisons une classe de cycle  $p$ -adique correspondante ; nous démontrons ensuite leur bijectivité pour  $X \in \mathcal{B}_{\text{éte}}(k)$ . Nous en déduisons le corollaire 1 et des propriétés de finitude pour la cohomologie motivique de Lichtenbaum, meilleures que pour la cohomologie motivique étale (et conjecturées par Lichtenbaum dans [43, introduction] pour toute variété projective lisse). Nous en déduisons aussi une formule pour le conoyau de l’application “classe de cycle  $l$ -adique entière”  $CH^n(X) \otimes \mathbf{Z}_l \rightarrow H_{\text{cont}}^{2n}(X, \mathbf{Z}_l(n))$  (corollaire 3.12).

Au §4, nous démontrons quelques résultats sur les ouverts de  $X$  et sur son corps des fonctions, dont les corollaires 2 et 4. Au §5, nous tirons la substance que mœlle des arguments précédents dans le cadre motivique. Pour ce faire, nous introduisons une catégorie de “motifs de Chow étales”  $\text{Chow}_{\mathbb{W}}(k)$ , fort pratique (voir [51] pour une approche différente, en termes de réalisations). Nous en déduisons un curieux “principe d’identité de Manin arithmétique” (corollaire 5.10). Nous y démontrons aussi le corollaire 6. Dans le §6, nous investigons la mesure dans laquelle les méthodes de cet article pourraient rapprocher l’échec de la démonstration des conjectures indiquées. Enfin, dans l’appendice, nous construisons une functorialité covariante sur la cohomologie motivique étale, nécessaire pour la construction de  $\text{Chow}_{\mathbb{W}}(k)$ .

Une partie substantielle du travail de Kimura sur lequel nous nous appuyons a été obtenue indépendamment par Peter J. O’Sullivan (communication personnelle à André et à l’auteur) : notamment la notion de dimension finie au sens de Kimura (semi-positivité dans sa terminologie) et le fait que le motif de Chow d’une variété abélienne est de dimension finie au sens de Kimura. Il n’obtient par contre pas le théorème de nilpotence de Kimura, ni a fortiori la proposition 1.4.

Les lignes ci-dessus soulignent la dette que j’ai envers les travaux antérieurs apparaissant dans la bibliographie : ils sont trop nombreux pour être cités dans le détail. En particulier, il aurait sans doute été possible de rédiger les §§3–6 en

termes de cohomologie motivique étale sans le travail de Geisser [15], mais les résultats auraient été plus désagréables à énoncer et les démonstrations plus compliquées.

Je remercie Yves André, Thomas Geisser, Hélène Esnault, Ofer Gabber, Steven Lichtenbaum, Christophe Soulé et Eckart Viehweg pour des commentaires pertinents sur la préparation de ce texte ; en particulier T. Geisser pour avoir attiré mon attention sur le problème soulevé dans 3.2.1 et m'avoir incité à écrire l'appendice A, et C. Soulé pour m'avoir encouragé à ne pas me limiter aux produits de courbes elliptiques. D'autre part, c'est avec Y. André que j'ai débattu dans [1] la proposition 1.4 ci-dessous, résultat clé sur lequel repose tout ce travail.

## 1. Équivalence rationnelle et équivalence numérique

Soient  $\mathcal{A}$  la catégorie des motifs de Chow sur  $k$  à coefficients rationnels et  $\bar{\mathcal{A}}$  la catégorie des motifs purs sur  $k$  modulo l'équivalence numérique, également à coefficients rationnels : cette dernière est abélienne semi-simple d'après [22]. On a un foncteur plein

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\rightarrow \bar{\mathcal{A}} \\ M &\mapsto \bar{M}. \end{aligned}$$

Pour tout objet  $M$  de  $\mathcal{A}$  ou  $\bar{\mathcal{A}}$ , on note  $F_M$  l'endomorphisme de Frobenius de  $M$ . Pour toute  $k$ -variété projective lisse  $X$ , on note  $h(X)$  (*resp.*  $\bar{h}(X)$ ) le motif de  $X$  dans  $\mathcal{A}$  (*resp.* son image dans  $\bar{\mathcal{A}}$ ).

**1.1. Remarque.** — Comme Voevodsky, nous adoptons la convention que le foncteur  $X \mapsto h(X)$  est *covariant*, et non *contravariant* comme il est d'usage plus traditionnellement. Nous notons aussi  $M \otimes L = M(1)$  au lieu de  $M \otimes L = M(-1)$ , où  $L$  est le motif de Lefschetz ( $h(\mathbf{P}^1) = \mathbf{1} \oplus L$ ). Avec ces conventions, on a  $CH^n(X) \otimes \mathbf{Q} = \mathcal{A}(h(X), L^n)$  et  $CH_n(X) \otimes \mathbf{Q} = \mathcal{A}(L^n, h(X))$  pour toute  $k$ -variété projective lisse  $X$ , ainsi que  $h(X) = h(X)(-\dim X)$ .

Rappelons la définition suivante [35] :

**1.2. Définition.** — Un objet  $M \in \mathcal{A}$  est de *dimension finie au sens de Kimura* s'il existe une décomposition  $M \simeq M_+ \oplus M_-$  et deux entiers  $n_+, n_- \geq 0$  tels que  $\Lambda^{n_++1} M_+ = \mathbf{S}^{n_++1} M_- = 0$ .

On a :

**1.3. Théorème (Kimura [35, th. 4.2, cor. 5.11, prop. 6.9])**

La sous-catégorie pleine de  $\mathcal{A}$  formée des motifs de dimension finie au sens de Kimura est additive, épaisse et rigide (stable par somme directe, facteurs directs, produit tensoriel et dual). Elle contient les motifs des variétés abéliennes.

La proposition suivante est directement inspirée de [35, prop. 7.5].

**1.4. Proposition** ([1, prop. 9.1.14]). — Soit  $M \in \mathcal{A}$  un motif de dimension finie au sens de Kimura. Alors le noyau de  $\mathcal{A}(M, M) \rightarrow \bar{\mathcal{A}}(\bar{M}, \bar{M})$  est un idéal nilpotent.  $\square$

**1.5. Lemme.** — Soit  $N \in \mathcal{A}$ , de dimension finie au sens de Kimura. Supposons que  $\bar{N}$  soit simple et que  $F_{\bar{N}} \neq 1$ . Alors  $\mathcal{A}(\mathbf{1}, N) = 0$ .

**Démonstration.** Soit  $P \in \mathbf{Q}[T]$  le polynôme minimal de  $F_{\bar{N}}$  : comme  $\bar{\mathcal{A}}(\bar{N}, \bar{N})$  est une  $\mathbf{Q}$ -algèbre à division,  $P$  est un polynôme irréductible, différent de  $T - 1$  par hypothèse. D'après la proposition 1.4, il existe  $n > 0$  tel que  $P(F_N)^n = 0$ . Soit  $f \in \mathcal{A}(\mathbf{1}, N)$ . Alors  $F_N f = f$ , d'où  $P(1)^n f = 0$  et  $f = 0$ .  $\square$

**1.6. Proposition.** — Soient  $M, M' \in \mathcal{A}$  deux motifs de dimension finie au sens de Kimura. Supposons que tout facteur simple  $\bar{N}$  de  $(\bar{M}')^\vee \otimes \bar{M}$  vérifie soit  $\bar{N} \simeq \mathbf{1}$ , soit  $F_{\bar{N}} \neq 1$ . Alors l'homomorphisme  $\mathcal{A}(M', M) \rightarrow \bar{\mathcal{A}}(\bar{M}', \bar{M})$  est un isomorphisme.

**Démonstration.** Grâce au théorème 1.3, on se ramène par dualité au cas où  $M' = \mathbf{1}$ . En réappliquant la proposition 1.4, on voit que toute décomposition de  $1_{\bar{M}}$  en somme d'idempotents orthogonaux se relève en une telle somme dans  $\mathcal{A}(M, M)$ . Pour cette décomposition, on a donc

$$M = \bigoplus M_i$$

où les  $\bar{M}_i$  sont simples. De plus, en utilisant toujours la proposition 1.4, on voit que  $\bar{M}_i \simeq \mathbf{1} \implies M_i \simeq \mathbf{1}$ . La proposition 1.6 résulte donc de l'hypothèse et du lemme 1.5.  $\square$

**1.7. Remarque.** — Le principe de la démonstration du lemme 1.5 et de la proposition 1.6 est très proche dans l'esprit de [14, prop. 3.2].

**1.8. Théorème.** — Soient  $X, X'$  deux  $k$ -variétés projectives lisses telles que  $X \times_k X' \in B_{\text{tate}}(k)$ . Alors, pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ , l'homomorphisme

$$\begin{aligned} CH^{\dim X+n}(X' \times X) \otimes \mathbf{Q} &= \mathcal{A}(h(X'), h(X)(n)) \\ &\rightarrow \bar{\mathcal{A}}(\bar{h}(X'), \bar{h}(X)(n)) = A_{\text{num}}^{\dim X+n}(X' \times X) \otimes \mathbf{Q} \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

**Démonstration.** Comme ci-dessus, on se ramène à  $X' = \text{Spec } k$ . Remarquons que  $h(X)(n)$  est de dimension finie au sens de Kimura [35, ex. 9.1]. Par ailleurs, l'action de Frobenius sur les  $H^i(\bar{X}, \mathbf{Q}_l)$  est semi-simple : en effet, ils sont engendrés multiplicativement par  $\bar{H}$  et cela résulte alors des résultats de Weil [63]. En utilisant la conjecture de Tate, on en déduit que l'équivalence homologique et l'équivalence numérique coïncident sur  $X$  [59, th. 2.9]. Il en résulte alors (cf. [48, prop. 2.6]) que pour tout facteur simple  $\bar{N}$  de  $\bar{h}(X)(n)$ , on a soit  $\bar{N} \simeq \mathbf{1}$  soit  $F_{\bar{N}} \neq 1$ . L'hypothèse de la proposition 1.6 est donc vérifiée, d'où le théorème 1.8.  $\square$

## 2. Premières applications

**2.1. Corollaire.** — Soit  $X \in B_{\text{tate}}(k)$ . Alors, pour tout  $n$ , l'ordre du pôle de la fonction zêta  $\zeta(X, s)$  en  $s = n$  est égal au rang de  $CH^n(X)$  (qui est fini d'après le théorème 1.8).

**Démonstration.** Un cas particulier du théorème 1.8 est que, sur  $X$ , l'équivalence homologique (relative disons à la cohomologie  $l$ -adique pour un nombre premier  $l$  différent de la caractéristique de  $k$ ) est égale à l'équivalence numérique. L'énoncé résulte donc du théorème de Spieß, du théorème 1.8 et de [59, th. 2.9].  $\square$

La seconde application résulte de Geisser [14, th. 3.3] :

**2.2. Corollaire.** — Si  $X \in B_{\text{tate}}(k)$ , alors la conjecture de Beilinson-Parshin est vraie pour  $X$  :  $K_i(X)$  est un groupe de torsion pour tout  $i > 0$ .  $\square$

Notons  $H^i(X, \mathbf{Q}(n))$  les groupes de cohomologie motivique de  $X$  à coefficients rationnels : dans cette section, ils peuvent être définis à la Beilinson comme espaces propres de groupes de  $K$ -théorie pour les opérations d'Adams [54].

**2.3. Corollaire.** — Soient  $X \in B_{\text{tate}}(k)$ ,  $d = \dim X$ ,  $K = k(X)$  et  $n$  un entier  $\geq 0$ . Alors la conjecture de Beilinson-Soulé vaut pour  $K$  en poids  $n$ , et on a même

$$H^i(K, \mathbf{Q}(n)) = 0 \text{ pour } i < n$$

dans les deux cas suivants :

- (i)  $d \leq 2$
- (ii)  $n \leq 2$ .

De plus, sous la condition (i),  $K_n^M(K)$  et  $K_n(K)$  sont de torsion première à  $p$  pour  $n \geq 3$  et  $K_n^M(K)$  est de torsion impaire pour  $n \geq 4$ .

**Démonstration.** cf. [14, th. 3.4] : on utilise le corollaire 2.2 et la suite spectrale de coniveau pour la cohomologie motivique. Si  $d \leq 2$ , les corps résiduels  $F$  de  $X$  autres que  $K$  sont de dimension 0 ou 1, donc les énoncés “ $H^i(F, \mathbf{Q}(n)) = 0$  pour  $i < n$ ” et “ $H^i(F, \mathbf{Q}(n)) = 0$  pour  $n > \dim F$ ” sont connus par les théorèmes de Quillen [52, 19] et de Harder [21]. Si  $n \leq 2$ , les poids intervenant dans les termes  $E_1^{p,q}$  avec  $p > 0$  sont  $\leq 1$ , et l’énoncé est encore connu [37, cor. 6.8]. L’assertion “première à  $p$ ” résulte de [16], et la dernière assertion pour  $\text{car } k \neq 2$  résulte de la conjecture de Milnor [61].  $\square$

**2.4. Corollaire.** — Soit  $A$  un anneau de valuation discrète de corps des fractions  $E$  et de corps résiduel  $K$ , où  $K = k(X)$  avec  $X \in B_{\text{tate}}(k)$ ,  $\dim X \leq 2$ . Alors, pour tout  $n \geq 0$ , la suite

$$0 \rightarrow K_{n+1}(A) \rightarrow K_{n+1}(E) \rightarrow K_n(K) \rightarrow 0$$

est exacte.

**Démonstration.** Soit  $m > 0$  premier à  $p = \text{car } k$ . Le diagramme commutatif au signe près

$$\begin{array}{ccc} K_{n+2}(E, \mathbf{Z}/m) & \twoheadrightarrow_m & K_{n+1}(E) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K_{n+1}(K, \mathbf{Z}/m) & \twoheadrightarrow_m & K_n(K) \end{array}$$

et la conjecture de Gersten pour  $K_*(-, \mathbf{Z}/m)$  (Gillet [18]) montrent que l’homomorphisme résidu  $K_{n+1}(E) \rightarrow K_n(K)$ . L’assertion résulte donc du corollaire 2.3 pour  $n \geq 3$ , et est bien connue pour  $n \leq 2$  puisqu’alors  $K_n(K) = K_n^M(K)$ .  $\square$

### 3. Classes de cycle motiviques

**3.1. Cohomologie motivique.** — Nous d'efinirons la cohomologie motivique d'une  $k$ -variété lisse  $X$  comme l'hypercohomologie de Zariski  $H_{\text{Zar}}^i(X, \mathbf{Z}(n))$  des complexes de cycles de Bloch décalés (cf. [4, 17, 31] pour les détails). Nous aurons aussi besoin de considérer l'hypercohomologie de ces complexes par rapport à d'autres topologies, et de les comparer. En particulier, le résultat ci-dessous sera d'usage constant :

**3.1. Proposition** ([31, prop. 1.18]). — *Pour toute variété lisse  $X$ , les homomorphismes*

$$H_{\text{Zar}}^i(X, \mathbf{Q}(n)) \rightarrow H_{\text{ét}}^i(X, \mathbf{Q}(n))$$

*sont des isomorphismes.* □

On a aussi :

**3.2. Proposition.** — *Soit  $X \in B_{\text{tate}}(k)$ . Alors  $H_{\text{Zar}}^i(X, \mathbf{Q}(n)) = 0$  pour  $i \neq 2n$ .*

**Démonstration.** Notons que l'énoncé est trivialement vrai pour  $i > 2n$  et toute variété lisse  $X$  (sur un corps quelconque) par définition de la cohomologie motivique. Pour  $i < 2n$ , cela résulte du corollaire 2.2 et du fait que  $H_{\text{Zar}}^i(X, \mathbf{Q}(n)) \simeq gr_{\gamma}^n K_{2n-i}(X)$  [4]. (Variante : raisonner directement comme dans la démonstration du théorème 1.8, en utilisant le fait que Frobenius agit sur ce groupe par multiplication par  $q^n$ , cf. [14].) □

**3.2. Cohomologie de Lichtenbaum.** — Nous allons utiliser la cohomologie introduite par Lichtenbaum dans [43]<sup>(2)</sup>. Cette cohomologie a été également étudiée par Geisser [15].

Rappelons [42, prop. 2.2] que la catégorie des faisceaux pour la topologie de Lichtenbaum sur une  $k$ -variété  $X$  de type fini est équivalente à la catégorie des faisceaux étales  $\mathbf{Z}$ -équivariants sur  $\bar{X} = X \times_k \bar{k}$ , où l'action de  $\mathbf{Z}$  sur  $\bar{X}$  est donnée par le morphisme de Frobenius galoisien. Pour un tel faisceau  $\mathcal{F}$ , on pose

$$H_W^0(X, \mathcal{F}) = H_{\text{ét}}^0(\bar{X}, \mathcal{F})^{\mathbf{Z}}$$

<sup>(2)</sup>Lichtenbaum dénomme cette cohomologie *Weil-étale cohomology*. Il nous paraît plus pratique et plus juste de la rebaptiser cohomologie de Lichtenbaum, la terminologie "cohomologie de Weil" pouvant de toute façon prêter à confusion.

et la cohomologie de Lichtenbaum  $H_W^*$  est définie comme les foncteurs dérivés de  $\mathcal{F} \mapsto \mathbb{H}_W(X, \mathcal{F})$ . En particulier on a une suite spectrale [43, prop. 2.3]

$$(3.1) \quad H^p(\mathbf{Z}, H_{\text{ét}}^q(\bar{X}, C)) \Rightarrow H_W^{p+q}(X, C)$$

pour tout complexe de faisceaux étales  $\mathbf{Z}$ -équivariants.

Pour comparer cohomologie étale et cohomologie de Lichtenbaum, le point de vue de Geisser [15, §2] est d'identifier la catégorie des faisceaux étales sur  $X$  à la catégorie des faisceaux étales  $\hat{\mathbf{Z}}$ -équivariants (topologiques discrets) sur  $\bar{X}$ , où  $\hat{\mathbf{Z}} = \text{Gal}(\bar{k}/k)$  [8, Exp. XIII, 1.1.3]. Soit  $\mathcal{T}_{\mathbf{Z}}(X)$  (resp.  $\mathcal{T}_{\hat{\mathbf{Z}}}(X)$ ) la catégorie des  $\bar{X}$ -faisceaux étales  $\mathbf{Z}$ -équivariants (resp.  $\hat{\mathbf{Z}}$ -équivariants) : on a des foncteurs adjoints évidents

$$\gamma_X^* : \mathcal{T}_{\hat{\mathbf{Z}}}(X) \rightarrow \mathcal{T}_{\mathbf{Z}}(X), \quad (\gamma_X)_* : \mathcal{T}_{\mathbf{Z}}(X) \rightarrow \mathcal{T}_{\hat{\mathbf{Z}}}(X).$$

Notons  $\mathcal{T}_{\mathbf{Z}}$  et  $\mathcal{T}_{\hat{\mathbf{Z}}}$  les catégories de faisceaux correspondantes sur les “grands sites lisses” correspondant à la catégorie  $Sm/k$  des  $k$ -variétés lisses de type fini. On a des foncteurs adjoints correspondants

$$\gamma^* : \mathcal{T}_{\hat{\mathbf{Z}}} \rightarrow \mathcal{T}_{\mathbf{Z}}, \quad \gamma_* : \mathcal{T}_{\mathbf{Z}} \rightarrow \mathcal{T}_{\hat{\mathbf{Z}}}$$

induisant des foncteurs adjoints sur les catégories dérivées

$$\gamma^* : D(\mathcal{T}_{\hat{\mathbf{Z}}}) \rightarrow D(\mathcal{T}_{\mathbf{Z}}), \quad R\gamma_* : D(\mathcal{T}_{\mathbf{Z}}) \rightarrow D(\mathcal{T}_{\hat{\mathbf{Z}}}).$$

*3.2.1. Mise en garde.* — Le foncteur  $R\gamma_*$  n'est pas conservatif. Par exemple, soit  $\mathbf{Q}\langle n \rangle$  le  $\mathbf{Z}[\mathbf{Z}]$ -module de support  $\mathbf{Q}$ , l'action du générateur de  $\mathbf{Z}$  étant donnée par  $r \mapsto \mathfrak{q}r$ . Alors  $\mathbf{Q}\langle n \rangle$  définit un objet de  $\hat{\mathbf{Z}}$ , mais on a  $H_W^*(X, \mathbf{Q}\langle n \rangle) = 0$  pour tout  $X \in Sm/k$  dès que  $n \neq 0$  : c'est immédiat à partir de (3.1).

Pour obvier cet inconvénient, introduisons la sous-catégorie épaisse  $D_{in}(\mathcal{T}_{\mathbf{Z}})$  de  $D(\mathcal{T}_{\mathbf{Z}})$  formée des complexes  $C$  tels que  $H_W^*(X, C) = 0$  pour tout  $X \in Sm/k$ , et notons

$$\bar{D}(\mathcal{T}_{\mathbf{Z}}) = D(\mathcal{T}_{\mathbf{Z}})/D_{in}(\mathcal{T}_{\mathbf{Z}}).$$

Soit  $\bar{\gamma}^*$  le composé de  $\gamma^*$  avec le foncteur de localisation  $D(\mathcal{T}_{\mathbf{Z}}) \rightarrow \bar{D}(\mathcal{T}_{\mathbf{Z}})$ . Alors  $R\gamma_*$  se factorise en un foncteur exact

$$\bar{R}\gamma_* : \bar{D}(\mathcal{T}_{\mathbf{Z}}) \rightarrow D(\mathcal{T}_{\hat{\mathbf{Z}}})$$

qui est conservatif par construction, et adjoint à droite de  $\bar{\gamma}^*$ . Nous aurons besoin de  $\bar{R}\gamma_*$  plutôt que de  $R\gamma_*$  pour une formulation correcte du théorème 6.2 (iv).

**3.3. Cohomologie de Lichtenbaum motivique.** — Nous considérerons principalement la cohomologie de Lichtenbaum à coefficients dans les complexes de cycles de Bloch. Pour tout  $X \in Sm/k$ , le foncteur  $R(\gamma_X)_*$  induit des homomorphismes canoniques

$$H_{\text{ét}}^i(X, \mathbf{Z}(n)) \rightarrow H_W^i(X, \mathbf{Z}(n)).$$

Le résultat suivant de Geisser sera d'usage constant : notons  $\beta$  le Bockstein et  $e$  le générateur de  $\mathbb{H}(k, \mathbf{Z}) = \text{Hom}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z})$  envoyant (par exemple) le Frobenius géométrique sur 1. On a de longues suites exactes [15, th. 6.1]

$$(3.2) \quad \cdots \rightarrow H_{\text{ét}}^i(X, \mathbf{Z}(n)) \rightarrow H_W^i(X, \mathbf{Z}(n)) \\ \rightarrow H_{\text{ét}}^{i-1}(X, \mathbf{Z}(n)) \otimes \mathbf{Q} \xrightarrow{\partial} H_{\text{ét}}^{i+1}(X, \mathbf{Z}(n)) \rightarrow \cdots$$

où  $\partial$  est donnée par la composition

$$H_{\text{ét}}^{i-1}(X, \mathbf{Z}(n)) \otimes \mathbf{Q} = H_{\text{ét}}^{i-1}(X, \mathbf{Q}(n)) \rightarrow H_{\text{ét}}^{i-1}(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(n)) \xrightarrow{e} \\ H_{\text{ét}}^i(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(n)) \xrightarrow{\beta} H_{\text{ét}}^{i+1}(X, \mathbf{Z}(n))$$

(cf. [29, prop. 9.12]).

On a aussi :

**3.3. Proposition** ([15, th. 6.5 et 6.7]). — *a) Pour toute  $k$ -variété lisse  $X$  de dimension  $d$  et pour tout  $n \geq 0$ , on a  $H_W^i(X, \mathbf{Z}(n)) = 0$  pour  $i > \sup(2d + 1, n + d + 1)$ .*

*b) Si  $X$  est de plus projective, on a un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccccc} H_W^{2d}(X, \mathbf{Z}(d)) & \longrightarrow & H_{\text{ét}}^{2d}(\bar{X}, \mathbf{Z}(d))_{\mathbf{Z}} & \xlongequal{\quad} & \mathbf{Z} \oplus (\text{fini}) \\ \cdot e \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_W^{2d+1}(X, \mathbf{Z}(d)) & \xleftarrow{\sim} & H_{\text{ét}}^{2d}(\bar{X}, \mathbf{Z}(d))_{\mathbf{Z}} & \xlongequal{\quad} & \mathbf{Z} \end{array}$$

où l'isomorphisme  $H_{\text{ét}}^{2d}(\bar{X}, \mathbf{Z}(d))_{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z}$  provient de l'homomorphisme “degré”

$$H_{\text{ét}}^{2d}(\bar{X}, \mathbf{Z}(d)) \simeq CH^d(\bar{X}) \rightarrow \mathbf{Z}$$

(cf. [15, d'ém. du lemme 6.4 a]). □

Nous aurons aussi besoin de la

**3.4. Proposition.** — *Pour toute variété lisse  $X$ ,  $H_W^i(X, \mathbf{Z}(n))$  est de torsion pour  $i > 2n + 1$ .*

**Démonstration.** Cela résulte par exemple du fait que  $H_{\text{Zar}}^i(\bar{X}, \mathbf{Q}(n)) = H_{\text{ét}}^i(\bar{X}, \mathbf{Q}(n)) = 0$  pour  $i > 2n$  et de la suite spectrale (3.1).  $\square$

**3.4. Classe de cycle  $l$ -adique.** — Fixons un nombre premier  $l \neq p$ . Nous allons utiliser une application *classe de cycle motivique  $l$ -adique pour la cohomologie de Lichtenbaum*. Cela revient à étendre les homomorphismes de [31, §1.4]

$$H_{\text{ét}}^i(X, \mathbf{Z}(n)) \otimes \mathbf{Z}_l \rightarrow H_{\text{cont}}^i(X, \mathbf{Z}_l(n))$$

en des homomorphismes provenant de  $H_W^i(X, \mathbf{Z}(n)) \otimes \mathbf{Z}_l$ .

Indiquons rapidement comment on procède : notons  $\alpha : (Sm/k)_{\text{ét}} \rightarrow (Sm/k)_{\text{Zar}}$  le foncteur de projection entre les sites définis par la catégorie  $Sm/k$  des  $k$ -variétés lisses de type fini munie respectivement des topologies étale et de Zariski. Dans [31, th. 1.17], nous avons défini un objet  $\mathbf{Z}(n) \in D^-(\text{Ab}((Sm/k)_{\text{Zar}}))$  dont la restriction à toute  $k$ -variété lisse  $X$  est quasi-isomorphe au complexe de cycles de Bloch de poids  $n$  sur  $X$ , puis un morphisme dans la catégorie dérivée [31, (1.8)]

$$(3.3) \quad \alpha^* \mathbf{Z}(n) \otimes^L \mathbf{Z}_l \rightarrow \mathbf{Z}_l(n)_{\text{ét}}^c$$

où  $\mathbf{Z}_l(n)_{\text{ét}}^c = R\varprojlim \mu_{l^n}^{\otimes n}$  dans la catégorie dérivée des faisceaux étales, que nous identifions canoniquement à  $D(\mathcal{T}_{\mathbf{Z}})$  (cf. 3.2).

Définissons de même  $\mathbf{Z}_W(n)_{\text{ét}}^c = R\varprojlim \gamma^* \mu_{l^n}^{\otimes n}$  dans  $D(\mathcal{T}_{\mathbf{Z}})$  (ibid.). On a alors un morphisme composé

$$(3.4) \quad \gamma^* \alpha^* \mathbf{Z}(n) \rightarrow \gamma^* \mathbf{Z}_l(n)_{\text{ét}}^c \rightarrow \mathbf{Z}_l(n)_{\text{ét}}^c.$$

C'est le morphisme cherché : il induit des homomorphismes

$$H_W^i(X, \mathbf{Z}(n)) \otimes \mathbf{Z}_l \rightarrow H_W^i(X, \mathbf{Z}_l(n)_{\text{ét}}^c).$$

Il reste à remarquer que l'adjoint  $\mathbf{Z}_l(n)_{\text{ét}}^c \rightarrow R\gamma_* \mathbf{Z}_l(n)_{\text{ét}}^c$  du morphisme  $\gamma^* \mathbf{Z}_l(n)_{\text{ét}}^c \rightarrow \mathbf{Z}_l(n)_{\text{ét}}^c$  est un quasi-isomorphisme : cela résulte du fait que  $R\gamma_*$  et  $R\varprojlim$  commutent et de l'analogie de (3.2) à coefficients  $\mu_{l^n}^{\otimes n}$ , qui montre que  $\mu_{l^n}^{\otimes n} \rightarrow R\gamma_* \gamma^* \mu_{l^n}^{\otimes n}$  est un quasi-isomorphisme pour tout  $n$  (cf. [15, cor. 3.4]). On en conclut que l'homomorphisme canonique

$$H_{\text{cont}}^i(X, \mathbf{Z}_l(n)) \rightarrow H_W^i(X, \mathbf{Z}_l(n)_{\text{ét}}^c)$$

est bijectif, et on en déduit bien l'application "classe de cycle" promise :

$$(3.5) \quad H_W^i(X, \mathbf{Z}(n)) \otimes \mathbf{Z}_l \rightarrow H_{\text{cont}}^i(X, \mathbf{Z}_l(n)).$$

(Bien entendu, on pourrait aussi procéder naïvement à partir de [17, §3.7], voir aussi [5, §4], qui est de toute façon à la base de notre construction, en

d'efficiant (3.5) "variété par variété" et en évitant [31, (1.8)], mais les détails seraient plus pénibles à rédiger.)

En fait :

**3.5. Lemme.** — *L'homomorphisme (3.5) n'est autre que celui induit par le morphisme  $\Phi_n : \alpha^* \mathbf{Z}(n) \otimes^L \mathbf{Z}_l(0)_{\text{ét}}^c \rightarrow \mathbf{Z}_l(n)_{\text{ét}}^c$  de [31, conj. 3.2].*

**Démonstration.** Rappelons que  $\Phi_n$  est défini comme la composition

$$\alpha^* \mathbf{Z}(n) \otimes^L \mathbf{Z}_l(0)_{\text{ét}}^c \rightarrow \mathbf{Z}_l(n)_{\text{ét}}^c \otimes^L \mathbf{Z}_l(0)_{\text{ét}}^c \rightarrow \mathbf{Z}_l(n)_{\text{ét}}^c$$

où la première flèche se déduit de (3.3) et la suivante est donnée par le cup-produit. Nous allons voir que  $\Phi_n$  se déduit de (3.4) par application du foncteur  $R\gamma_*$ .

En effet, on a déjà vu le quasi-isomorphisme  $\mathbf{Z}_l(n)_{\text{ét}}^c \xrightarrow{\sim} R\gamma_* \mathbf{Z}_l(n)_{\mathbb{W}}^c$ . D'autre part, d'après [15, th. 3.3], le morphisme de double adjonction

$$(3.6) \quad R\gamma_* \mathbf{Z} \otimes^L \alpha^* \mathbf{Z}(n) \rightarrow R\gamma_* \gamma^* \alpha^* \mathbf{Z}(n)$$

est également un quasi-isomorphisme. Dans [29, th. 4.6 et 6.3], nous avons établi un quasi-isomorphisme

$$\mathbf{Z}_l(0)_{\text{ét}}^c \simeq \mathbf{Z}^c \otimes \mathbf{Z}_l$$

où  $\mathbf{Z}^c$  est un certain complexe de longueur 1. Enfin, dans [15, th. 4.2], Geisser établit un quasi-isomorphisme  $\mathbf{Z} \simeq R\gamma_* \mathbf{Z}$ . L'assertion résulte aisément de tous ces quasi-isomorphismes, en suivant leurs définitions respectives.  $\square$

**3.5. Classe de cycle  $p$ -adique.** — Posons

$$\mathbf{Z}_p(n)_{\text{ét}}^c = R\varprojlim \nu_r(n)[-n] \quad (n \geq 0)$$

où  $\nu_r(n)$  est le  $n$ -ième faisceau de Hodge-Witt logarithmique de niveau  $r$ , et de même

$$\mathbf{Z}_p(n)_{\mathbb{W}}^c = R\varprojlim \gamma^* \nu_r(n)[-n].$$

Pour  $n < 0$ , on pose  $\mathbf{Z}_p(n)_{\text{ét}}^c = 0$  et  $\mathbf{Z}_p(n)_{\mathbb{W}}^c = 0$ .

En passant à la limite sur la construction de [16, d'ém. du th. 8.3], on obtient une classe de cycle motivique  $p$ -adique pour la cohomologie étale

$$\alpha^* \mathbf{Z}(n) \otimes \mathbf{Z}_p \rightarrow \mathbf{Z}_p(n)_{\text{ét}}^c$$

puis une classe de cycle motivique  $p$ -adique pour la cohomologie de Lichtenbaum

$$(3.7) \quad \gamma^* \alpha^* \mathbf{Z}(n) \otimes \mathbf{Z}_p \rightarrow \gamma^* \mathbf{Z}_p(n)_{\text{ét}}^c \rightarrow \mathbf{Z}_p(n)_{\mathbb{W}}^c$$

et plus concrètement, pour une variété lisse  $X$  donnée, des homomorphismes

$$(3.8) \quad H_W^i(X, \mathbf{Z}(n)) \otimes \mathbf{Z}_p \rightarrow H_{\text{cont}}^i(X, \mathbf{Z}_p(n))$$

où  $H_{\text{cont}}^i(X, \mathbf{Z}_p(n)) := H_{\text{ét}}^i(X, \mathbf{Z}_p(n)_{\text{ét}}^c) \xrightarrow{\sim} H_W^i(X, \mathbf{Z}_p(n)_W^c)$  (cf. 3.4).

### 3.6. Bijectivité des classes de cycle. —

**3.6. Théorème.** — *Si  $X \in B_{\text{tate}}(k)$ , (3.5) est un isomorphisme pour tous  $l \neq p$ ,  $i$ ,  $n$ , et (3.8) est un isomorphisme pour tous  $i$ ,  $n$ .*

**Démonstration.** Traitons d'abord le cas de (3.5). D'après le lemme 3.5, il suffit de voir que le morphisme induit par  $\Phi_n$  est un isomorphisme pour tout  $n$ ; cela résulte du théorème 1.8, du corollaire 2.1 et de [31, th. 3.4]. (On pourrait aussi procéder directement à partir de la conjecture de Tate et du théorème 1.8, mais ce serait plus laborieux.) On en déduit déjà :

**3.7. Lemme.** — *Pour  $X \in B_{\text{tate}}(k)$ , on a  $H_W^i(X, \mathbf{Q}(n)) = 0$  pour  $i < 2n$  et la composition*

$$CH^n(X) \otimes \mathbf{Q} \simeq H_{\text{Zar}}^{2n}(X, \mathbf{Q}(n)) \rightarrow H_W^{2n}(X, \mathbf{Q}(n))$$

*est un isomorphisme pour tout  $n \geq 0$ .*

**Démonstration.** Le premier point résulte par récurrence sur  $i$  de la suite exacte (3.2) (cf. propositions 3.1 et 3.2). Cette même suite exacte implique alors que  $H_{\text{ét}}^{2n}(X, \mathbf{Q}(n)) \rightarrow H_W^{2n}(X, \mathbf{Q}(n))$  est un isomorphisme, et on conclut par la proposition 3.4.  $\square$

Démontrons maintenant que (3.8) est aussi un isomorphisme. On procède directement, en imitant la méthode de [31, §3.4] : on remarque d'abord que la version de (3.8) à coefficients  $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$  est un isomorphisme d'après [16] (ce fait est vrai pour toute  $k$ -variété lisse). Par le lemme des 5, on se ramène à démontrer que (3.8)  $\otimes \mathbf{Q}$  est un isomorphisme.

On sait déjà que  $H_W^i(X, \mathbf{Q}(n)) = 0$  pour  $i < 2n$  (par le lemme 3.7) et pour  $i > 2n + 1$  (par la proposition 3.4). La même chose est vraie pour les groupes  $H_{\text{cont}}^i(X, \mathbf{Q}_p(n))$ , en utilisant un théorème de Gabber [7, th. 3] et la suite exacte longue

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_{\text{ét}}^{i-n-1}(X, \nu_{\infty}(n)) \rightarrow H_{\text{cont}}^i(X, \mathbf{Z}_p(n)) \rightarrow \\ H_{\text{cont}}^i(X, \mathbf{Q}_p(n)) \rightarrow H_{\text{ét}}^{i-n}(X, \nu_{\infty}(n)) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Il reste donc à traiter les cas  $i = 2n$  et  $i = 2n + 1$ . Milne [46, prop. 5.4] a démontré qu'on peut utiliser l'action galoisienne sur les groupes

$H^i(\bar{X}, \mathbf{Q}_p(n))$  à la place de l'action de Frobenius sur la cohomologie cristalline pour calculer la fonction  $\zeta(X, s)$ . En particulier, en tenant compte de l'hypothèse de Riemann [10] et de [34], cela démontre que

$$(3.9) \quad H^i(\bar{X}, \mathbf{Q}_p(n))^G = H^i(\bar{X}, \mathbf{Q}_p(n))_G = 0 \text{ pour } i \neq 2n.$$

Considérons le diagramme commutatif (cf. [31, d'ém. de la prop. 3.9])

$$(3.10) \quad \begin{array}{ccccc} H_W^{2n}(X, \mathbf{Z}(n)) \otimes \mathbf{Q}_p & \rightarrow & H_{\text{cont}}^{2n}(X, \mathbf{Q}_p(n)) & \xrightarrow{\sim} & H_{\text{cont}}^{2n}(\bar{X}, \mathbf{Q}_p(n))^G \\ \cdot e \downarrow \wr & & \cdot e \downarrow & & f \downarrow \\ H_W^{2n+1}(X, \mathbf{Z}(n)) \otimes \mathbf{Q}_p & \rightarrow & H_{\text{cont}}^{2n+1}(X, \mathbf{Q}_p(n)) & \xleftarrow{\sim} & H_{\text{cont}}^{2n}(\bar{X}, \mathbf{Q}_p(n))_G \end{array}$$

où  $f$  est la composition

$$H_{\text{cont}}^{2n}(\bar{X}, \mathbf{Q}_p(n))^G \hookrightarrow H_{\text{cont}}^{2n}(\bar{X}, \mathbf{Q}_p(n)) \twoheadrightarrow H_{\text{cont}}^{2n}(\bar{X}, \mathbf{Q}_p(n))_G$$

(voir [46, prop. 6.5] pour la commutativité du carré de droite). La flèche verticale de gauche est un isomorphisme par le cas  $l \neq p$ , et les flèches horizontales de droite sont des isomorphismes grâce à (3.9).

En procédant comme dans [59, §2] et en utilisant [46, prop. 5.4] et [34], on voit que le corollaire 2.1 implique que  $f$  est bijective et que la composition

$$CH^n(X) \otimes \mathbf{Q}_p \rightarrow H_W^{2n}(X, \mathbf{Z}(n)) \otimes \mathbf{Q}_p \rightarrow H_{\text{cont}}^{2n}(\bar{X}, \mathbf{Q}_p(n))^G$$

est surjective. De plus, le théorème 1.8 implique que cette composition est injective. En utilisant le lemme 3.7, on en déduit que la composition horizontale supérieure dans (3.10) est bijective. Il en résulte que tous les homomorphismes de (3.10) sont bijectifs.  $\square$

### 3.7. Conséquences. —

**3.8. Corollaire.** — Si  $X \in B_{\text{tate}}(k)$  et  $d = \dim X$ ,

a) L'accouplement

$$(3.11) \quad H_W^{2n}(X, \mathbf{Z}(n)) \times H_W^{2d-2n}(X, \mathbf{Z}(d-n)) \rightarrow H_W^{2d}(X, \mathbf{Z}(d)) \rightarrow \mathbf{Z}$$

est parfait modulo torsion pour tout  $n$ .

b) Pour tout  $(i, n)$ , l'accouplement

$$\begin{aligned} H_W^i(X, \mathbf{Z}(n))_{\text{tors}} \times H_W^{2d+1-i}(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(d-n)) \\ \rightarrow H_W^{2d+1}(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(d)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \end{aligned}$$

induit un accouplement parfait de groupes finis

$$H_W^i(X, \mathbf{Z}(n))_{\text{tors}} \times H_W^{2d+2-i}(X, \mathbf{Z}(d-n))_{\text{tors}} \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}.$$

c) (cf. [43, introduction]) Les groupes  $H_W^i(X, \mathbf{Z}(n))$  sont de type fini pour tout  $i$ , finis pour  $i \notin \{2n, 2n + 1\}$  et nuls pour  $i \leq 0$  (si  $n > 0$ ).

d) Le noyau et le conoyau du cup-produit par  $e$

$$H_W^{2n}(X, \mathbf{Z}(n)) \rightarrow H_W^{2n+1}(X, \mathbf{Z}(n))$$

sont finis.

e) L'homomorphisme canonique

$$H_{\text{ét}}^i(X, \mathbf{Z}(n)) \rightarrow H_W^i(X, \mathbf{Z}(n))$$

est un isomorphisme pour  $i \leq 2n$ .

**Démonstration.** Il résulte de [10, 34, 13] que  $H_{\text{cont}}^i(X, \mathbf{Z}_l(n))_{\text{tors}}$  est fini pour tout  $i \in \mathbf{Z}$ , y compris  $l = p$ , et nul pour presque tout  $l$  (cf. [7, th. 2 et 3]). De plus,  $H_{\text{cont}}^i(X, \mathbf{Z}_l(n))$  est fini pour  $i \neq 2n, 2n + 1$  (ibid.). Il résulte d'abord de ceci et du théorème 3.6 que c) est vrai pour  $i \notin \{2n, 2n + 1\}$ , et est vrai pour  $i \in \{2n, 2n + 1\}$  après tensorisation par  $\mathbf{Z}_l$  (pour tout  $l$ ).

L'assertion b) est vraie après tensorisation par  $\mathbf{Z}_l$  par le cas de la cohomologie étale continue (cf. [46, th. 1.14] pour le cas  $l = p$ ); sa version entière en résulte directement. De même, a) est vrai après tensorisation par  $\mathbf{Z}$ . La version entière de a) et de c) résulte alors du lemme suivant, que nous n'avons pas trouvé dans la littérature :

**3.9. Lemme.** — Soient  $R$  un anneau de Dedekind et  $A \times B \rightarrow R$  un accouplement de deux  $R$ -modules  $A, B$  sans torsion.

a) Supposons que cet accouplement devienne parfait après tensorisation par  $R_l$  pour tous les idéaux maximaux  $l$  de  $R$ , où  $R_l$  désigne le complété de  $R$  en  $l$ . Alors il est parfait.

b) Soit  $K$  le corps des fractions de  $R$ . Si, de plus,  $A \otimes K$  ou  $B \otimes K$  est un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie, alors  $A$  et  $B$  sont de type fini.

**Démonstration.** a) Soit  $R_{(l)}$  le localisé de  $R$  en  $l$ . Comme l'extension  $R_l/R_{(l)}$  est fidèlement plate, l'hypothèse vaut en remplaçant  $R_l$  par  $R_{(l)}$ . Considérons l'homomorphisme (injectif)

$$(3.12) \quad A \rightarrow \text{Hom}(B, R).$$

On a une chaîne d'homomorphismes

$$A_{(l)} \rightarrow \text{Hom}(B, R)_{(l)} \rightarrow \text{Hom}(B_{(l)}, R_{(l)}).$$

Il est facile de voir que le second homomorphisme est injectif. De plus, la composition est bijective par hypothèse. Par conséquent, le premier homomorphisme est lui aussi bijectif. Le conoyau  $M$  de (3.12) vérifie donc

$M_{(l)} = 0$  pour tout  $l$ . Il en résulte que  $M = 0$  et que l'accouplement est parfait.

b) Pour fixer les idées, supposons que  $\dim_{\mathbb{K}} B \otimes K < \infty$ . Soit  $(b_1, \dots, b_n)$  une famille d'éléments de  $B$  qui définit une base de  $B \otimes K$ , et soit  $B'$  sous-module de  $B$  engendré par les  $b_i$ . Comme pour tout  $b \in B$ , il existe  $r \in R$  tel que  $rb \in B'$ , l'application  $\text{Hom}(B, R) \rightarrow \text{Hom}(B', R)$  est injective. Donc  $A$  s'injecte dans un  $R$ -module de type fini et il est donc lui-même de type fini. En échangeant  $A$  et  $B$ , on obtient la même conclusion pour  $B$ .  $\square$

Revenons à la démonstration du corollaire 3.8 : il reste à démontrer d) et e). L'assertion d) résulte de c) et du fait qu'elle est vraie après tensorisation par  $\mathbf{Q}$ , comme il résulte de la démonstration du théorème 3.6. Enfin, e) découle de c) et de (3.2), par récurrence sur  $i$ .  $\square$

**3.10. Corollaire.** — *Les conjectures de [42, §7] sont vraies pour  $X \in B_{\text{tate}}(k)$ .*

**Démonstration.** Rappelons tout d'abord ces conjectures [42, §7] en termes modernes ; étant donné une  $k$ -variété projective lisse  $X$  :

1.  $H_{\text{ét}}^i(X, \mathbf{Z}(n)) = 0$  pour  $i$  grand.
2.  $H_{\text{ét}}^{2n}(X, \mathbf{Z}(n))$  est un groupe abélien de type fini.
3.  $H_{\text{ét}}^i(X, \mathbf{Z}(n))$  est fini pour  $i \neq 2n, 2n + 2$ , nul pour  $i \leq 0$  lorsque  $n > 0$ <sup>(3)</sup>.
4.  $H_{\text{ét}}^{2d+2}(X, \mathbf{Z}(d))$  est canoniquement isomorphe à  $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ , où  $d = \dim X$ .
5. L'accouplement

$$H_{\text{ét}}^i(X, \mathbf{Z}(n)) \times H_{\text{ét}}^{2d+2-i}(X, \mathbf{Z}(d-n)) \rightarrow H_{\text{ét}}^{2d+2}(X, \mathbf{Z}(d)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

est "parfait", au sens qu'il définit une dualité parfaite de groupes finis pour  $i \neq 2n$  et une dualité parfaite entre un groupe de type fini et un groupe de cotype fini pour  $i = 2n$ . En particulier,  $\text{rg } H_{\text{ét}}^{2d}(X, \mathbf{Z}(d)) = 1$ .

6. Les groupes  $H_{\text{ét}}^{2n}(X, \mathbf{Z}(n))$  et  $H_{\text{ét}}^{2d-2n}(X, \mathbf{Z}(d-n))$  ont le même rang  $m(n)$ .
7.  $m(n)$  est l'ordre du pôle de la fonction  $Z(X, t)$  en  $t = q^{-n}$  ( $\zeta(X, s) = Z(X, q^{-s})$ ).

<sup>(3)</sup>Cette conjecture de nullité résulte de l'axiome (1) de [42, §3] ; il est pratique de l'insérer ici.

$$8. \lim_{t \rightarrow q^{-n}} (1 - q^n t)^{m(n)} Z(X, t) = \pm q^{\chi(X, \mathcal{O}_X, n)} \chi(X, \mathbf{Z}(n)), \text{ avec}$$

$$\chi(X, \mathbf{Z}(n)) =$$

$$\prod_{i \neq 2n, 2n+2} |H_{\text{ét}}^i(X, \mathbf{Z}(n))|^{(-1)^i} \cdot \frac{|H_{\text{ét}}^{2n}(X, \mathbf{Z}(n))_{\text{tors}}| |H_{\text{ét}}^{2n+2}(X, \mathbf{Z}(n))_{\text{cotors}}|}{R_n(X)}$$

où  $R_n(X)$  est la valeur absolue du déterminant de l'accouplement

$$\begin{aligned} H_{\text{ét}}^{2n}(X, \mathbf{Z}(n))/\text{tors} \times H_{\text{ét}}^{2d-2n}(X, \mathbf{Z}(d-n))/\text{tors} \\ \rightarrow H_{\text{ét}}^{2d}(X, \mathbf{Z}(d))/\text{tors} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z} \end{aligned}$$

par rapport à des bases quelconques de  $H_{\text{ét}}^{2n}(X, \mathbf{Z}(n))/\text{tors}$  et de  $H_{\text{ét}}^{2d-2n}(X, \mathbf{Z}(d-n))/\text{tors}$ , et

$$\chi(X, \mathcal{O}_X, n) = \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq d}} (-1)^{i+j} (n-i) h_{ij}, \quad h_{ij} = \dim H^j(X, \Omega^i).$$

En fait,  $X$  étant quelconque, les énoncés 1 et 4 ne sont plus des conjectures, ni le fait que  $\text{rg } H_{\text{ét}}^{2d}(X, \mathbf{Z}(d)) = 1$  : vu (3.2), le point a) de la proposition 3.3 implique la conjecture 1 de Lichtenbaum pour  $i > 2d + 2$  et le point b) implique la conjecture 4 et le fait que  $H_{\text{ét}}^{2d}(X, \mathbf{Z}(d))$  est de type fini et de rang 1. Cela peut d'ailleurs s'obtenir directement.

Il reste à traiter les conjectures 2, 3, 5, 6, 7 et 8. La conjecture 2 résulte du corollaire 3.8 c) et e), ainsi que la conjecture 3 pour  $i < 2n$ ; le reste découle du corollaire 3.8 c) et de la suite exacte (3.2). De même, 5 découle du corollaire 3.8 a) et b), via (3.2), et 6 découle du corollaire 3.8 a) et e). Enfin, 7 découle du corollaire 3.8 e) et du corollaire 2.1.

Pour 8, on préfère d'émontrer la variante de [15, th. 8.1] (voir aussi [51, th. 10.7]), qui lui est équivalente via (3.2) :

$$8_W. \lim_{t \rightarrow q^{-n}} (1 - q^n t)^{m(n)} Z(X, t) = \pm q^{\chi(X, \mathcal{O}_X, n)} \chi(X, \mathbf{Z}(n)), \text{ avec}$$

$$\chi(X, \mathbf{Z}(n)) = \prod_i |H_W^i(X, \mathbf{Z}(n))_{\text{tors}}|^{(-1)^i} \cdot R_n(X)^{-1}$$

et  $\chi(X, \mathcal{O}_X, n)$  comme dans 8, où  $R_n(X)$  est la valeur absolue du déterminant de l'accouplement (3.11) vu modulo torsion par rapport à des bases quelconques de  $H_W^{2n}(X, \mathbf{Z}(n))/\text{tors}$  et de  $H_W^{2d-2n}(X, \mathbf{Z}(d-n))/\text{tors}$ .

On peut procéder comme dans [47, th. 4.3 et cor. 5.5] (cf. [29, cor. 7.10 et th. 9.20] et [15, d'énonc. du th. 8.1]).  $\square$

**3.11. Remarque.** — Il est facile de préciser le signe dans la conjecture 8 de Lichtenbaum : on remarque simplement que  $\zeta(X, s)$  est à valeurs réelles positives pour  $s$  réel assez grand et ne s'annule pas pour  $s > d$ . Le signe en  $s = n$  ne dépend alors que de l'ordre des zéros pour  $s > n$  : on trouve qu'il est égal à  $(-1)^{\sum_{a>n} m(a)}$ .

**3.12. Corollaire.** — Soit  $X \in B_{\text{tate}}(k)$ . Alors, pour tout  $l$ , on a une suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow CH^n(X)\{l\} &\rightarrow CH^n(X) \otimes \mathbf{Z}_l \oplus H_{\text{ét}}^{2n-1}(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(n)) \\ &\rightarrow H_{\text{cont}}^{2n}(X, \mathbf{Z}_l(n)) \rightarrow CH^n(X) \otimes \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l \rightarrow H_{\text{ét}}^{2n}(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(n)). \end{aligned}$$

En particulier, on a une suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Ker}(CH^n(X) \otimes \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l \xrightarrow{\bar{cl}} H_{\text{ét}}^{2n}(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(n))) \\ \rightarrow \text{Coker}(CH^n(X) \otimes \mathbf{Z}_l \xrightarrow{cl} H_{\text{cont}}^{2n}(X, \mathbf{Z}_l(n))) \\ \rightarrow \text{Coker}(CH^n(X)\{l\} \xrightarrow{bl} H_{\text{ét}}^{2n-1}(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(n))) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

où  $cl$  est la classe de cycle  $l$ -adique,  $\bar{cl}$  est la classe de cycle à coefficients divisibles et  $bl$  est le raffinement de Bloch de la classe de cycle  $l$ -adique sur les cycles algébriques de torsion [3].

**Démonstration.** Cela résulte immédiatement du diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{array}{ccccc} 0 & & 0 & & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ CH^n(X)\{l\} & = & H_{\text{Zar}}^{2n-1}(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(n)) & \longrightarrow & H_{\text{ét}}^{2n-1}(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(n)) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ CH^n(X) \otimes \mathbf{Z}_l & = & H_{\text{Zar}}^{2n}(X, \mathbf{Z}_l(n)) \otimes \mathbf{Z}_l & \longrightarrow & H_{\text{cont}}^{2n}(X, \mathbf{Z}_l(n)) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ CH^n(X) \otimes \mathbf{Q}_l & = & H_{\text{Zar}}^{2n}(X, \mathbf{Z}_l(n)) \otimes \mathbf{Q}_l & \xrightarrow{\sim} & H_{\text{cont}}^{2n}(X, \mathbf{Q}_l(n)) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ CH^n(X) \otimes \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l & = & H_{\text{Zar}}^{2n}(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(n)) & \longrightarrow & H_{\text{ét}}^{2n}(X, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(n)) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

où, compte tenu de la proposition 3.1, les 0 supérieurs du milieu et de droite proviennent du corollaire 3.8 c) et e) et l'isomorphisme provient de ce corollaire et du théorème 3.6.  $\square$

**3.13. Corollaire** (cf. [46, remark 5.6 a)], [51, §3]). — Soit  $X \in B_{\text{tate}}(k)$ . Pour que l'application cycle  $l$ -adique entière  $CH^n(X) \otimes \mathbf{Z}_l \rightarrow H_{\text{cont}}^{2n}(X, \mathbf{Z}_l(n))$  soit surjective, il faut et il suffit que

(i) La classe de cycle à coefficients divisibles

$$CH^n(X) \otimes \mathbf{Q}_l / \mathbf{Z}_l \xrightarrow{\bar{c}_l} H_{\text{ét}}^{2n}(X, \mathbf{Q}_l / \mathbf{Z}_l(n))$$

soit injective ;

(ii) L'application de Bloch  $CH^n(X)\{l\} \xrightarrow{bl} H_{\text{ét}}^{2n-1}(X, \mathbf{Q}_l / \mathbf{Z}_l(n))$  soit surjective.  $\square$

#### 4. Variétés ouvertes

**4.1. Lemme.** — Soit  $X$  une  $k$ -variété projective lisse de dimension  $d$ . Alors sous les conditions suivantes

(i)  $d \leq 1$

(ii)  $n \leq 1$

les groupes  $H_W^i(X, \mathbf{Z}(n))$  sont de type fini pour  $i \neq 2n + 1$ . Ils sont finis pour  $i \neq 2n, 2n + 1$  ainsi que pour  $n > d$ , et nuls pour  $i \leq 0$  si  $n > 0$ .

**Démonstration.** Si  $n = 0$ , l'énoncé résulte de [43, th. 3.2]. Supposons  $n = 1$  : alors  $\mathbf{Z}(1) = \mathbb{G}_m[-1]$ . La suite exacte (3.2) se traduit en une suite exacte

$$(4.1) \quad \cdots \rightarrow H_{\text{ét}}^{i-1}(X, \mathbb{G}_m) \rightarrow H_W^i(X, \mathbf{Z}(1)) \\ \rightarrow H_{\text{ét}}^{i-2}(X, \mathbb{G}_m) \otimes \mathbf{Q} \xrightarrow{\partial} H_{\text{ét}}^i(X, \mathbb{G}_m) \rightarrow \cdots$$

Le groupe  $H_{\text{ét}}^{i-2}(X, \mathbb{G}_m) \otimes \mathbf{Q}$  est nul pour  $i \neq 3$ . Le groupe  $H_W^i(X, \mathbf{Z}(1))$  est donc nul pour  $i \leq 0$ , isomorphe à  $E^*$  pour  $i = 1$  (où  $E$  est le corps des constantes de  $X$ ) donc fini, et isomorphe à  $\text{Pic}(X)$  pour  $i = 2$ , donc de type fini par le théorème de Néron-Severi. Pour  $i > 3$ , il est isomorphe à un quotient de  $H_{\text{ét}}^{i-1}(X, \mathbb{G}_m)$  ; par la suite exacte de Kummer, ce groupe est lui-même isomorphe à  $H_{\text{ét}}^{i-1}(X, (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(1))$  qui est fini par [7, th. 2]. Enfin, si  $X$  est un point, les  $H_{\text{ét}}^i(X, \mathbb{G}_m)$  sont finis pour tout  $i$ , donc aussi les  $H_W^i(X, \mathbf{Z}(1))$ . Ceci démontre (ii).

Si  $X$  est un point ou une courbe, toute la straté-gie de démonstration conduisant au corollaire 3.8 s’applique : la conjecture de Tate est vraie pour  $X$  et l’équivalence rationnelle coïncide avec l’équivalence numérique, donc le théorème 3.6 est vrai pour  $X$ . On en déduit (i).  $\square$

**4.2. Remarque.** — D’après (4.1), la génération finie de  $\mathfrak{H}(X, \mathbf{Z}(1))$  implique la finitude de  $H_{\text{ét}}^p(X, \mathbb{G}_m) = Br(X)$ , elle-même équivalente à la validité de la conjecture de Tate en codimension 1 pour  $X$ . Cette implication est donc en fait une équivalence par les raisonnements du paragraphe précédent.

**4.3. Lemme.** — Soit  $X$  une  $k$ -variété lisse de dimension  $d$ . Alors sous les conditions suivantes

- (i)  $d \leq 1$
- (ii)  $n \leq 1$

les groupes  $H_W^i(X, \mathbf{Z}[1/p](n))$  sont des  $\mathbf{Z}[1/p]$ -modules de type fini pour  $i \leq n$  ou  $i > 2n + 1$ . Ils sont finis pour  $i \notin [n, 2n + 1]$  ainsi que pour  $n > d$ , et nuls pour  $i \leq 0$  si  $n > 0$ .

**Démonstration.** En partant du lemme 4.1, on utilise la même méthode de dévissage que celle de [32, d’em. du th. 1] : c’est loisible car les groupes  $H_W^i(X, \mathbf{Z}[1/p](n))$  satisfont à un théorème de pureté, ce qui se réduit à la pureté de la cohomologie étale [31, cor. 1.19] via l’isomorphisme (3.6) (c’est pour avoir cette pureté qu’il est nécessaire d’inverser  $p$ ). Le seul point à vérifier est qu’on ne “perd” pas de génération finie quand on utilise le théorème de de Jong [24].

Soit donc  $\tilde{U} \rightarrow U$  un revêtement fini de variétés lisses, et supposons que  $H_W^i(\tilde{U}, \mathbf{Z}[1/p](n))$  soit un  $\mathbf{Z}[1/p]$ -module de type fini. Par un argument de transfert,  $\text{Ker}(H_W^i(U, \mathbf{Z}[1/p](n)) \rightarrow H_W^i(\tilde{U}, \mathbf{Z}[1/p](n)))$  est d’exposant fini, disons  $m$ . Mais  $H_{\text{ét}}^{i-1}(U, \mu_m^{\otimes n}) = H_W^{i-1}(U, \mu_m^{\otimes n})$  est fini par [9, Th. finitude], ce qui montre que ce noyau est fini, d’où la génération finie de  $H_W^i(U, \mathbf{Z}[1/p](n))$ .  $\square$

La proposition suivante raffine le corollaire 2.3 :

**4.4. Proposition.** — Soit  $U$  un ouvert non vide de  $X$ , où  $X \in B_{\text{tate}}(k)$ , et soit  $d = \dim X = \dim U$ . Alors, dans les deux cas suivants :

- (i)  $d \leq 2$
- (ii)  $n \leq 2$

les conclusions du lemme 4.3 sont vraies pour  $U$ .

**Démonstration.** Même méthode que ci-dessus, en utilisant le corollaire 3.8 c) et le lemme 4.3. Plus précisément :

Notons  $Z = X - U$  (structure réduite) et stratifions  $Z$  par sa chaîne canonique de lieux singuliers ( $Z_0 = Z, Z_{r+1} = (Z_r)_{\text{sing}}$ ). Il suffit de voir que, pour tout  $r \geq 0$ , le groupe  $H_W^j(Z_r - Z_{r+1}, \mathbf{Z}[1/p](n - c_r))$  vérifie les hypothèses du lemme 4.3, où  $c_r$  est la codimension de  $Z_r$  dans  $X$ .

a) Si  $d \leq 2$ , les  $Z_r - Z_{r-1}$  sont soit des points soit des courbes, et on est dans le cas (i) du lemme 4.3.

b) Si  $n \leq 2$ , on a  $n - c_r \leq 1$  pour tout  $r$ , et on est dans le cas (ii) du lemme 4.3.  $\square$

**4.5. Théorème.** — Soient  $X \in B_{\text{tate}}(k)$  et  $U$  un ouvert de  $X$ . Alors les groupes

$$H^0(U, \mathcal{K}_2), H^1(U, \mathcal{K}_2), H^2(U, \mathcal{K}_2) = CH^2(U)$$

sont de type fini. Le groupe  $K_3(K)_{\text{ind}}$  est égal à  $K_3(k)$ , où  $K$  est le corps des fonctions de  $X$  (ou de  $U$ ).

**Démonstration.** Si l'on acceptait d'inverser  $p$ , ce résultat se déduirait directement de la proposition 4.4 via [28, th. 1.1 et 1.6] ; pour obtenir un résultat exact, on est obligé de refaire la démonstration (pureté) avec la cohomologie de Zariski motivique plutôt qu'avec la cohomologie de Lichtenbaum motivique.

Traisons d'abord le cas de  $X$  : d'après [28, th. 1.6], les groupes cités ne sont autres que  $H^i(X, \mathbf{Z}(2))$  pour  $i$  respectivement égal à 2, 3, 4 et 1. D'autre part, d'après *loc. cit.*, th. 1.1, l'homomorphisme  $H^i(X, \mathbf{Z}(2)) \rightarrow H_{\text{ét}}^i(X, \mathbf{Z}(2))$  est bijectif pour  $i \leq 3$  et injectif pour  $i = 4$ . L'énoncé pour les  $H(X, \mathcal{K}_2)$  résulte donc encore du corollaire 3.8 c). De plus, on obtient que  $K_3(K)_{\text{ind}}$  est de type fini. Mais, d'après Merkurjev-Suslin [45], l'homomorphisme

$$K_3(k) \rightarrow K_3(K)_{\text{ind}}$$

est injectif à conoyau divisible ; il est donc bijectif (cf. [26]).

(Dans [28], nous travaillions avec le complexe  $\Gamma(2)$  de Lichtenbaum : les raisonnements sont identiques en remplaçant  $\Gamma(2)$  par  $\mathbf{Z}(2)$  et en utilisant les résultats de Merkurjev-Suslin [44, 45].)

Dans le cas général, on raisonne comme dans la démonstration de la proposition 4.4, en utilisant le théorème de pureté pour la cohomologie motivique et le fait que les groupes  $H_{\text{Zar}}^i(X, \mathbf{Z}(m))$  sont de type fini pour  $m \leq 1$  et toute

$k$ -variété lisse  $X$  : pour  $m = 0$  c'est évident et pour  $m = 1$  cela se réduit à la génération finie de  $\Gamma(X, \mathbb{G})$  ( $i = 1$ ) et de  $\text{Pic}(X)$  ( $i = 2$ ).<sup>(4)</sup>  $\square$

**4.6. Théorème.** — Soient  $X \in B_{\text{tate}}(k)$  de dimension  $\leq 2$  et  $K = k(X)$ . Alors on a des isomorphismes canoniques

$$\left( K_n^M(K) \oplus \bigoplus_{0 \leq i \leq n-1} H^{2i-n-1}(K, (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(i)) \right) \otimes \mathbf{Z}_{(2)} \xrightarrow{\sim} K_n(K) \otimes \mathbf{Z}_{(2)}$$

où  $(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(i) = \varinjlim_{(m, \text{car } k)=1} \mu_m^{\otimes i}$ . De plus,  $K_n^M(K)$  est de torsion pour  $n \geq 3$  et nul pour  $n \geq 4$ .

**Démonstration.** Supposons d'abord  $\text{car } k = 2$ . Alors le second facteur du membre de gauche est nul. L'isomorphisme  $K_n^M(K) \otimes \mathbf{Z}_{(2)} \xrightarrow{\sim} K_n(K) \otimes \mathbf{Z}_{(2)}$  résulte de [16].

Supposons maintenant  $\text{car } k \neq 2$ . Pour construire le morphisme, on part des isomorphismes de [30, th. 1] :

$$\bigoplus_{0 \leq i \leq n+1} H_{\text{ét}}^{2i-n-1}(K, \mu_{2^\nu}^{\otimes i}) \xrightarrow{\sim} K_{n+1}(K, \mathbf{Z}/2^\nu).$$

En prenant la limite inductive sur  $\nu$ , on obtient des isomorphismes

$$\bigoplus_{0 \leq i \leq n+1} H_{\text{ét}}^{2i-n-1}(K, \mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2(i)) \xrightarrow{\sim} K_{n+1}(K, \mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2).$$

On obtient l'homomorphisme de l'énoncé en composant avec le Bockstein  $K_{n+1}(K, \mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2) \rightarrow K_n(K) \otimes \mathbf{Z}_{(2)}$  et en négligeant les facteurs  $i = n, n+1$ .

Pour montrer que cet homomorphisme est un isomorphisme, on raisonne comme dans [30] en utilisant la suite spectrale (convergente) de Bloch-Lichtenbaum [6]

$$(4.2) \quad E_2^{p,q} = H^{p-q}(K, \mathbf{Z}(-q)) \Rightarrow K_{-p-q}(K).$$

Tout d'abord, le corollaire 4.4 montre que le groupe  $H_{\text{Zar}}^i(K, \mathbf{Z}(n))$  est de torsion pour  $i < n$ . Il en résulte que le Bockstein  $H_{\text{Zar}}^{-1}(K, (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(n)) \rightarrow H_{\text{Zar}}^i(K, \mathbf{Z}[1/p](n))$  est un isomorphisme pour  $i < n$ . D'autre part, la conjecture de Milnor [61] et [17] montrent que les homomorphismes

<sup>(4)</sup>On peut réduire la preuve de la génération finie de  $\text{Pic}(X)$  au cas projectif en passant par le théorème de de Jong, par le même raisonnement que dans la démonstration du lemme 4.3.

$H_{\text{Zar}}^{i-1}(K, \mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2(n)) \rightarrow H_{\text{ét}}^{i-1}(K, \mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2(n))$  sont des isomorphismes pour  $i \leq n$ . On en déduit des isomorphismes

$$(4.3) \quad H_{\text{ét}}^{i-1}(K, \mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2(n)) \xrightarrow{\sim} H_{\text{Zar}}^i(K, \mathbf{Z}(n)) \otimes \mathbf{Z}_{(2)}, \quad i < n.$$

En utilisant la compatibilité de (4.2) aux produits et aux transferts [11, 40] et les isomorphismes (4.3), et en examinant la construction des homomorphismes du théorème 4.4, on démontre comme dans [30, §3] que ces derniers détruisent successivement les différentielles de la suite spectrale (4.2) (localisée en 2) et scindent la filtration donnée par celle-ci sur l'aboutissement. Ceci conclut la démonstration, et donne de plus que la suite spectrale (4.2) dégénère canoniquement après localisation en 2.  $\square$

**4.7. Corollaire.** — *L'algèbre  $K_*(K) \otimes \mathbf{Z}_{(2)}$  est engendrée par les unités et la  $K$ -théorie du sous-corps des constantes, à transfert près.*

**Démonstration.** Cela résulte de la construction dans [30] des flèches donnant naissance à l'isomorphisme du théorème 4.6. Plus précisément, l'homomorphisme composé

$$\begin{aligned} \bigoplus_{[k':k] < \infty} K_{2i-n-1}^M(k'K) \otimes H^0(k', \mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2(n+1-i)) &\rightarrow \\ \bigoplus_{[k':k] < \infty} H^{2i-n-1}(k'K, \mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2(i)) &\xrightarrow{\text{Cor}} H^{2i-n-1}(k'K, \mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2(i)) \end{aligned}$$

est surjectif pour tout  $0 \leq i \leq n-1$  d'après la conjecture de Milnor et [27, th. 1]. D'autre part, on a d'après Quillen des isomorphismes  $K_{2n-2i+1}^M(k') \otimes \mathbf{Z}_{(2)} \xrightarrow{\sim} H^0(k', \mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2(n+1-i))$ . Enfin, la composition de la surjection induite

$$\bigoplus_{[k':k] < \infty} K_{2i-n-1}^M(k'K) \otimes K_{2n-2i+1}(k') \otimes \mathbf{Z}_{(2)} \rightarrow H^{2i-n-1}(K, \mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2(i))$$

avec la flèche du théorème 4.6 n'est autre par construction (cf. [30]) que celle donnée par le produit en  $K$ -théorie. Le corollaire en résulte.  $\square$

**4.8. Remarque.** — En passant à la limite sur les extensions finies de  $k$ , on déduit du corollaire 4.7 que la conjecture de Suslin [56, conj. 4.1 et note] est vraie après localisation en 2 pour le corps  $L = \bar{k}K$  : l'algèbre  $K_*(L) \otimes \mathbf{Z}_{(2)}$  est engendrée par  $K_*(L) \otimes \mathbf{Z}_{(2)}$  et  $K_*(\bar{k}) \otimes \mathbf{Z}_{(2)}$ .

**4.9. Remarque.** — Soit  $U$  un ouvert de  $X$ , où  $X \in B_{\text{tate}}(k)$  et  $\dim X \leq 2$ . On peut montrer que, pour tout  $n \in \mathbf{Z}$

- (i)  $\zeta(U, s) = (1 - q^{n-s})^{a_n} \varphi(s)$ , avec  $a_n = \sum (-1)^{r+1} \text{rg } H_r^{c,\text{ét}}(U, \mathbf{Z}(n))$
- (ii)  $\varphi(n) = \prod_{r=0}^{2d} \text{ind}(\bar{\partial}_r)^{(-1)^{r+1}}$  à une puissance de  $q$  près

où

- a)  $H_r^{c,\text{ét}}(U, \mathbf{Z}(n)) = H_{\text{ét}}^{2d-r}(U, \mathbf{Z}(d-n))$
- b)  $\bar{\partial}_r : H_{r+2}^{c,\text{ét}}(U, \mathbf{Z}(n)) \otimes (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})' \rightarrow H_r^{c,\text{ét}}(U, \mathbf{Z}(n))_{\text{tors}}[1/p]$  est un certain homomorphisme induit par l'homomorphisme  $\partial$  de (3.2), dont le noyau et le conoyau sont finis
- c)  $\text{ind}(\bar{\partial}_r) = |\text{Ker } \bar{\partial}_r| / |\text{Coker } \bar{\partial}_r|$ .

Voir [29, th. 9.16], ainsi que le théorème 5.8 (iv) et la démonstration de la proposition 5.16.

**4.10. Remarque.** — Si l'on essaye d'étendre les résultats du théorème 4.5 aux poids supérieurs, on se heurte d'abord à la conjecture de Bloch-Kato (isomorphisme de la  $K$ -théorie de Milnor modulo  $m$  avec la cohomologie galoisienne). Pour les besoins de la discussion, supposons celle-ci connue. Alors le résultat principal de Geisser-Levine [17] implique que le morphisme canonique

$$\mathbf{Z}(n) \rightarrow \tau_{\leq n+1} R\alpha_* \alpha^* \mathbf{Z}(n)$$

est un quasi-isomorphisme dans  $D^-((Sm/k)_{\text{Zar}})$ . Concrètement, on en déduit que, pour toute  $k$ -variété lisse  $X$ , l'homomorphisme

$$H_{\text{Zar}}^i(X, \mathbf{Z}(n)) \rightarrow H_{\text{ét}}^i(X, \mathbf{Z}(n))$$

est un isomorphisme pour  $i \leq n+1$  et est injectif pour  $i = n+2$ . Si  $X$  est par exemple un produit de courbes elliptiques, cela implique via le corollaire 3.8 c) que  $H_{\text{Zar}}^i(X, \mathbf{Z}(n))$  est de type fini pour  $i \leq n+2$ .

Pour  $n \leq 2$ , ceci couvre toute la cohomologie motivique de  $X$  : c'est le théorème 4.5 dans le cas projectif. Examinons le cas  $n = 3$ . On obtient une suite exacte :

$$0 \rightarrow H_{\text{Zar}}^5(X, \mathbf{Z}(3)) \rightarrow H_{\text{ét}}^5(X, \mathbf{Z}(3)) \rightarrow H_{\text{Zar}}^0(X, R^5\alpha_* \mathbf{Z}(3)) \\ \rightarrow CH^3(X) \rightarrow H_{\text{ét}}^6(X, \mathbf{Z}(3)).$$

Ceci montre que *sous la conjecture de Bloch-Kato et pour  $X \in B_{\text{tate}}(k)$ ,  $CH^3(X)$  est de type fini si et seulement si le groupe de cohomologie non ramifiée  $H_{\text{Zar}}^0(X, R^5\alpha_* \mathbf{Z}(3)) \simeq H_{\text{Zar}}^0(X, \mathcal{H}_{\text{ét}}^4((\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(3)))$  est de type fini.*

Pour rendre la discussion ci-dessus inconditionnelle, on peut localiser en  $l = 2$  et utiliser le théorème de Voevodsky [61]. On peut aussi localiser en  $l = p$  et utiliser le théorème de Geisser-Levine [16].

Il serait amusant de donner un exemple où la 2-torsion de  $H_{\text{Zar}}^0(X, \mathcal{H}_{\text{ét}}^4((\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(3)))$  est infinie.

## 5. Retour aux motifs

**5.1. Motifs purs.** — Rappelons que  $\mathcal{A}$  désigne la catégorie des  $k$ -motifs de Chow à coefficients rationnels, et  $\bar{\mathcal{A}}$  la catégorie des motifs purs modulo l'équivalence numérique (également à coefficients rationnels). Donnons-nous un nombre premier  $l$ . Les foncteurs

$$X \mapsto H_{\text{cont}}^i(\bar{X}, \mathbf{Q}_l(n))$$

$$X \mapsto H^i(X, \mathbf{Q}(n))$$

se prolongent en des foncteurs

$$M \mapsto H_{\text{cont}}^i(\bar{M}, \mathbf{Q}_l)$$

$$M \mapsto H^i(M, \mathbf{Q})$$

par les règles

$$H_{\text{cont}}^i(\bar{h}(X)(j), \mathbf{Q}_l) = H_{\text{cont}}^{i-2j}(\bar{X}, \mathbf{Q}_l(-j))$$

$$H^i(h(X)(j), \mathbf{Q}) = H^{i-2j}(X, \mathbf{Q}(-j)).$$

**5.1. Lemme.** — Pour tout  $M \in \mathcal{A}$  et pour tout  $i \in \mathbf{Z}$ , l'action de Frobenius sur  $H_{\text{cont}}^i(\bar{M}, \mathbf{Q}_l)$  est pure de poids  $i$ ; son polynôme caractéristique ne dépend pas de  $l$ .

**Démonstration.** Cela résulte de l'hypothèse de Riemann [10] et de [34], par réduction aux variétés projectives lisses.  $\square$

Introduisons maintenant quelques sous-catégories pleines de  $\mathcal{A}$  :

- $\mathcal{A}_{s,l}$  : motifs  $M$  tels que l'action de Frobenius sur  $H^*(\bar{M}, \mathbf{Q}_l)$  soit semi-simple. C'est une sous-catégorie épaisse, donc pseudo-abélienne puisque  $\mathcal{A}$  l'est. Elle est aussi monoïdale et rigide.
- $\mathcal{A}_{\text{kim}}$  : motifs de dimension finie au sens de Kimura. Elle est aussi pseudo-abélienne rigide [35].
- $\mathcal{A}_{t,l}$  : motifs  $M$  tels que les homomorphismes

$$\mathcal{A}(M, \mathbf{1}) \otimes \mathbf{Q}_l \rightarrow H^0(\bar{M}, \mathbf{Q}_l)^G$$

$$\mathcal{A}(M^\vee, \mathbf{1}) \otimes \mathbf{Q}_l \rightarrow H^0(\bar{M}^\vee, \mathbf{Q}_l)^G$$

soient surjectifs, où  $G = \text{Gal}(\bar{k}/k)$ . Elle est pseudo-abélienne, stable par dual mais pas a priori par produit tensoriel.

La catégorie  $\mathcal{A}_{s,l} \cap \mathcal{A}_{\text{kim}}$  contient les motifs de variétés abéliennes et leurs tordus à la Tate. Conjecturalement, on a  $\mathcal{A}_{s,l} = \mathcal{A}_{\text{kim}} = \mathcal{A}_{t,l} = \mathcal{A}$ .

**5.2. Proposition.** — *La catégorie  $\mathcal{A}_{st} = \mathcal{A}_{s,l} \cap \mathcal{A}_{t,l}$  ne dépend pas de  $l$ . Pour tout  $M \in \mathcal{A}_{st}$ , on a*

$$\dim \bar{\mathcal{A}}(M, \mathbf{1}) = -\text{ord}_{s=0} \zeta(M, s)$$

où  $\zeta(M, s)$  est la fonction zêta de  $M$  [36]. De plus, les homomorphismes

$$\mathcal{A}_{\text{hom},l}(M, \mathbf{1}) \rightarrow \bar{\mathcal{A}}(M, \mathbf{1}), \quad \mathcal{A}_{\text{hom},l}(\mathbf{1}, M) \rightarrow \bar{\mathcal{A}}(\mathbf{1}, M),$$

où  $\mathcal{A}_{\text{hom},l}$  désigne la catégorie des motifs purs modulo l'équivalence  $\mathbf{Q}_l$ -homologique, sont bijectifs.

**Démonstration.** Cela résulte de (la démonstration de) [59, th. 2.9].  $\square$

**5.3. Théorème.** — *Soit  $\mathcal{A}' = \mathcal{A}_{st} \cap \mathcal{A}_{\text{kim}}$ . Cette sous-catégorie pleine de  $\mathcal{A}$  est pseudo-abélienne et stable par dual. De plus, pour tout  $M \in \mathcal{A}'$ , les homomorphismes*

$$\mathcal{A}(\mathbf{1}, M) \rightarrow \bar{\mathcal{A}}(\mathbf{1}, M), \quad \mathcal{A}(M, \mathbf{1}) \rightarrow \bar{\mathcal{A}}(M, \mathbf{1})$$

sont bijectifs.

**Démonstration.** Cela se démontre comme le théorème 1.8.  $\square$

**5.4. Proposition.** — *Pour  $M \in \mathcal{A}'$ , on a  $H^i(M, \mathbf{Q}) = H^i_{\text{cont}}(\bar{M}, \mathbf{Q}_l)^G = 0$  pour  $i \neq 0$  et pour tout  $l$ .*

**Démonstration.** Pour la nullité du premier groupe, même démonstration que [14, th. 3.3] : par un raisonnement analogue à celui de la démonstration de la proposition 1.6 (utilisant la proposition 1.4 et la semi-simplicité de  $\bar{\mathcal{A}}$ ), on peut supposer  $M \in \bar{\mathcal{A}}$  simple. Si  $M \neq \mathbf{1}$ , on a  $F_M \neq \mathbf{1}$ , d'où l'énoncé. Si  $M = \mathbf{1}$ , l'énoncé est évident. La nullité du deuxième groupe découle du lemme 5.1.  $\square$

**5.5. Remarque.** — Soit  $\mathcal{A}_{\text{ell}}$  la sous-catégorie épaisse de  $\mathcal{A}$  engendrée par les motifs des produits de courbes elliptiques et leurs tordus à la Tate. Alors  $\mathcal{A}_{\text{ell}} \subset \mathcal{A}'$  d'après [55]. Cette sous-catégorie est rigide. Il en résulte via le théorème 5.3 (ou par le théorème 1.8) que le foncteur induit

$$\mathcal{A}_{\text{ell}} \rightarrow \bar{\mathcal{A}}_{\text{ell}}$$

est une équivalence de catégories. En particulier,  $\bar{\mathcal{A}}$  est abélienne semi-simple.

Nous allons maintenant donner un analogue du corollaire 3.10 pour les objets de  $\mathcal{A}'$ . Pour cela, nous avons besoin d'introduire une autre catégorie : les *motifs de Chow étales*.

**5.6. Définition.** — La catégorie  $\text{Chow}_{\text{ét}}$  des motifs de Chow étales est définie de la manière suivante :

- a) On introduit la catégorie des correspondances de Chow étales effectives  $\text{Cor}_{\text{ét}}^{\text{eff}}$ , dont les objets sont  $k$ -variétés projectives lisses ( $X \mapsto [X]$ ) et les morphismes des éléments des groupes

$$\text{Cor}_{\text{ét}}([X], [Y]) = H_{\text{ét}}^{2 \dim X}(X \times Y, \mathbf{Z}(\dim X))$$

la composition étant induite par la formule habituelle.

- b) On construit la catégorie des motifs de Chow étales effectifs  $\text{Chow}_{\text{ét}}^{\text{eff}}$  : un objet est un couple  $([X], p)$ , où  $p = p^2 \in \text{Cor}_{\text{ét}}^{\text{eff}}([X], [X]) \otimes \mathbf{Q}$ ; un morphisme de  $([X], p)$  vers  $([Y], q)$  est un élément  $f \in \text{Cor}_{\text{ét}}^{\text{eff}}([X], [Y])$  tel que  $\hat{f} = q\hat{f}p$ , où  $\hat{f}$  est l'image de  $f$  dans  $\text{Cor}_{\text{ét}}^{\text{eff}}([X], [Y]) \otimes \mathbf{Q}$ ; la composition des morphismes est induite par celle de  $\text{Cor}_{\text{ét}}^{\text{eff}}$ .
- c) On passe de  $\text{Chow}_{\text{ét}}^{\text{eff}}$  à  $\text{Chow}_{\text{ét}}$  en inversant le motif de Lefschetz. On note  $h : \text{SmProj}/k \rightarrow \text{Chow}_{\text{ét}}$  le foncteur évident.

La justification que toutes ces constructions est donnée dans l'appendice A. La catégorie  $\text{Chow}_{\text{ét}}$  est pseudo-abélienne, monoïdale symétrique rigide. On a un foncteur évident (additif, monoïdal)

$$\mathcal{A} \rightarrow (\text{Chow}_{\text{ét}}) \otimes \mathbf{Q}$$

qui est *pleinement fidèle* par la proposition 3.1 et même *essentiellement surjectif* puisque les deux catégories sont pseudo-abéliennes. On en déduit un foncteur (additif, tensoriel)

$$(5.1) \quad \text{Chow}_{\text{ét}} \rightarrow \mathcal{A}$$

bien défini à isomorphisme naturel monoïdal près, et *essentiellement surjectif* par construction.

On notera que si  $([X], p) \in \text{Cor}_{\text{ét}}^{\text{eff}}$ , il existe  $m \in \mathbf{Z} - \{0\}$  tel que  $mp$  provienne d'un  $\tilde{p} \in \text{Cor}_{\text{ét}}^{\text{eff}}([X], [X])$ . Un tel  $\tilde{p}$  induit des morphismes  $[X] \rightarrow ([X], p)$  et  $([X], p) \rightarrow [X]$ , dont la composition dans les deux sens est (en choisissant  $m$  assez grand) la multiplication par  $m$ . Par contre,  $([X], p)$  n'est pas en général facteur direct de  $[X]$ .

**5.7. Proposition.** — *Le foncteur bigradué  $X \mapsto H_W^i(X, \mathbf{Z}(n))$  des variétés projectives lisses vers les groupes abéliens induit un foncteur gradué*

$$\begin{aligned} \text{Chow}_{\text{ét}} &\rightarrow \text{Ab}^* \\ M &\mapsto H_W^*(M, \mathbf{Z}) \end{aligned}$$

tel que  $H_W^i(h(X)(n), \mathbf{Z}) = H_W^{i-2n}(X, \mathbf{Z}(-n))$  pour toute variété projective lisse  $X$  et tout  $n \in \mathbf{Z}$ .

**Démonstration.** Voir A.11. Plus précisément, si  $([X], p) \in \text{C}_{\text{ét}}^{\text{off}}$ , on définit

$$H_W^i([X], p, \mathbf{Z}(n)) = \{x \in H_W^i(X, \mathbf{Z}(n)) \mid p\hat{x} = \hat{x}\}$$

où  $\hat{x}$  est l'image de  $x$  dans  $H_W^i(X, \mathbf{Z}(n)) \otimes \mathbf{Q}$ .  $\square$

De même, pour tout  $l$ , la cohomologie étale continue induit un foncteur gradué

$$\begin{aligned} \text{Chow}_{\text{ét}} &\rightarrow \mathbf{Z}_l\text{-Mod}^* \\ M &\mapsto H_{\text{cont}}^*(M, \mathbf{Z}_l) \end{aligned}$$

et on a une transformation naturelle

$$(5.2) \quad H_W^*(-, \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Z}_l \rightarrow H_{\text{cont}}^*(-, \mathbf{Z}_l).$$

Afin d'énoncer le théorème suivant, définissons des groupes  $H^j(M, \Omega^i)$  pour tout  $M \in \text{Chow}_{\text{ét}}$  : d'une part, les correspondances de Chow étales opèrent sur la cohomologie de Hodge puisque celle-ci peut s'exprimer en termes de cohomologie étale. D'autre part, pour toute variété projective lisse  $X$ , on a un isomorphisme

$$H^j(X, \Omega^i) \oplus H^{j-1}(X, \Omega^{i-1}) \xrightarrow{\sim} H^j(X \times \mathbf{P}^1, \Omega^i)$$

induit par le cup-produit par la "première classe de Chern" de  $\mathcal{O}(1)$  dans  $H^1(\mathbf{P}^1, \Omega^1)$ . Ceci justifie le fait que la définition

$$H^j(h(X)(n), \Omega^i) = H^{j-n}(X, \Omega^{i-n})$$

s'étend functoriellement à  $\text{Chow}_{\text{ét}}$  par passage aux facteurs directs.

**5.8. Théorème.** — *Soit  $\text{Chow}'_{\text{ét}}$  l'image réciproque pleine de  $\mathcal{A}'$  par le foncteur (5.1). Alors,*

a) *Pour tout  $l$ , la restriction de (5.2) à  $\text{Chow}'_{\text{ét}}$  est un isomorphisme de foncteurs.*

b) *Pour tout  $M \in \text{Chow}'_{\text{ét}}$ , les groupes  $H_W^i(M, \mathbf{Z})$  sont de type fini. Ils sont*

finis pour  $i \neq 0, 1$  et nuls sauf pour un nombre fini de valeurs de  $i$ . L'homomorphisme  $H_W^0(M, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\cdot e} H_W^1(M, \mathbf{Z})$  a un noyau et un conoyau finis. De plus :

(i) L'accouplement  $H_W^0(M, \mathbf{Z}) \times H_W^0(M^\vee, \mathbf{Z}) \rightarrow \mathbf{Z}$  induit par la flèche de dualité  $\mathbf{1} \rightarrow M \otimes M^\vee$  est parfait modulo torsion.

(ii) Les accouplements analogues

$$H_W^{i+1}(M, \mathbf{Z})_{\text{tors}} \times H_W^{-i}(M^\vee, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

induisent des accouplements parfaits de groupes finis

$$H_W^{i+1}(M, \mathbf{Z})_{\text{tors}} \times H_W^{-i+1}(M^\vee, \mathbf{Z})_{\text{tors}} \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}.$$

(iii) L'homomorphisme canonique  $\text{Chow}'_{\text{ét}}(M, \mathbf{1}) \rightarrow H_W^0(M, \mathbf{Z})$  est bijectif.

(iv) Soit  $\hat{M}$  l'image de  $M$  dans  $\mathcal{A}'$ . Alors l'ordre du pôle de  $\zeta(\hat{M}, s)$  est égal à  $m = \text{rg } H_W^0(M, \mathbf{Z}) = \dim \mathcal{A}'(\hat{M}, \mathbf{1})$ . On a

$$\lim_{s \rightarrow 0} (1 - q^{-s})^m \zeta(\hat{M}, s) = \pm q^{\chi(M, \mathcal{O})} \prod_i |H_W^i(M, \mathbf{Z})_{\text{tors}}|^{(-1)^i} \cdot R(M)^{-1}$$

où  $R(M)$  est la valeur absolue du déterminant de l'accouplement de (i) modulo torsion par rapport à des bases quelconques des groupes accouplés et

$$\chi(M, \mathcal{O}) = \sum_{i,j} (-1)^{i+j+1} i h_{ij}, \quad h_{i,j} = \dim_k H^j(M, \Omega^i).$$

En particulier, le second membre ne dépend que de  $\hat{M}$ .

**Démonstration.** On procède comme au §3. □

### 5.9. Remarques (concernant le théorème 5.8 (iv)). —

1. Ceci donne un sens précis à [47, conj. 7.3], où le terme  $\chi(M, \mathcal{O})$  (noté  $\chi(M, \mathcal{O}, 0)$ ) n'était pas défini. En fait, les groupes  $H^j(\hat{M}, \Omega^i)$  n'ont pas de sens individuellement pour  $\hat{M} \in \mathcal{A}$ , puisqu'ils sont annulés par  $p$ . Il n'est pas clair que  $\chi(M, \mathcal{O})$  ne dépende que de  $\hat{M}$ .
2. Pour  $n \in \mathbf{Z}$ , la valeur spéciale de  $\zeta(\hat{M}, s)$  en  $s = n$  s'obtient en appliquant ce résultat à  $M(-n)$ .
3. On peut préciser le signe dans l'expression donnée, exactement comme dans la remarque 3.11.
4. Le foncteur  $\text{Chow}_{\text{ét}} \rightarrow \mathcal{A}$  étant essentiellement surjectif, le théorème 5.8 (iv) décrit les valeurs spéciales de  $\zeta(\hat{M}, s)$  pour tous les motifs  $\hat{M} \in \mathcal{A}'$ .

Pour  $M \in \text{Chow}'_{\text{ét}}$ , posons  $H_W^q(M, \mathbf{Z}(n)) = H_W^{q-2n}(M(-n), \mathbf{Z})$ .

**5.10. Corollaire (“principe d’identité de Manin arithmétique”)**

Soit  $f : M \rightarrow M'$  un morphisme de  $\text{Chow}'_{\text{ét}}$ . Supposons que  $f^* : H_W^q(M', \mathbf{Z}(n)) \rightarrow H_W^q(M, \mathbf{Z}(n))$  et  $f_* : H_W^q(M^\vee, \mathbf{Z}(n)) \rightarrow H_W^q((M')^\vee, \mathbf{Z}(n))$  soient des isomorphismes pour tout  $q, n \in \mathbf{Z}$  (de manière équivalente via (3.2), remplacer la cohomologie de Lichtenbaum par la cohomologie étale). Alors

a)  $\zeta(\hat{M}, s) = \zeta(\hat{M}', s)$ ;

b)  $f$  induit un isomorphisme dans  $\mathcal{A}$ . (On pourrait dire que  $f$  est une isogénie.)

(Ce résultat est *faux* si l’on prend des coefficients rationnels : prendre  $M = 0$  et pour  $M'$  un motif simple qui n’est pas une puissance du motif de Lefschetz.)

**Démonstration.** Soit  $f \in \mathbf{Q}(t)$  tel que  $f(n)$  soit défini et égal à  $\pm 1$  pour tout  $n \geq 0$  : alors  $f$  est constant, égal à  $\pm 1$ . Ceci montre avec le théorème 5.8 b) (iv) que, sous les hypothèses,  $\zeta(M, s)/\zeta(M', s) = \pm 1$ . Mais  $\lim_{s \rightarrow +\infty} \zeta(M, s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \zeta(M', s) = 1$ , d’où a). En utilisant l’hypothèse de Riemann, il s’ensuit que  $f^*$  induit des isomorphismes sur tous les groupes de cohomologie  $\mathbf{Q}_l$ -adique géométriques, et donc sur les  $\hat{H}(-, \mathbf{Q})$  d’après le théorème 5.8 a) et b) (iii), ainsi que la proposition 3.1. b) résulte maintenant du principe d’identité de Manin (géométrique).  $\square$

**5.11. Question.** — Est-ce que  $f$  est même un isomorphisme dans  $\text{Chow}'_{\text{ét}}$  ?

**5.2. Motifs mixtes.** — Notons  $\mathcal{D}$  la catégorie  $DM_{\text{gm}}(k) \otimes \mathbf{Q}$  de Voevodsky [60]. Par ailleurs, choisissons une sous-catégorie épaisse  $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$  qui soit *rigide*, c’est-à-dire stable par produit tensoriel : on peut par exemple prendre  $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}_{\text{ell}}$ , ou pour  $\mathcal{A}''$  la sous-catégorie additive tensorielle épaisse engendrée par le motif d’une variété abélienne simple “de type K3” ou “presque ordinaire” (voir les exemples de l’introduction). D’après le théorème 5.3,  $\mathcal{A}$  est abélienne semi-simple. Soit  $\mathcal{B}$  la sous-catégorie épaisse (triangulée) de  $\mathcal{D}$  engendrée par l’image essentielle de  $\mathcal{A}$  via le foncteur de *loc. cit.*, prop. 2.1.4. Notons  $\delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{D}$  ce foncteur, ainsi que sa restriction à  $\mathcal{A}''$ .

**5.12. Proposition.** — Pour tous  $M, N \in \mathcal{A}''$ , on a

$$\mathcal{D}''(\delta(M), \delta(N)[i]) = \begin{cases} 0 & \text{pour } i \neq 0 \\ \mathcal{A}''(M, N) & \text{pour } i = 0. \end{cases}$$

**Démonstration.** Vu le corollaire 5.4, il suffit de démontrer que pour  $M, N \in \mathcal{A}$ , on a un isomorphisme canonique

$$\mathcal{D}'(\delta(M), \delta(N)[i]) = H^i(M \otimes N^\vee, \mathbf{Q}).$$

Par dualité, on se ramène au cas  $N = \mathbf{1}$ . On se ramène ensuite au cas où  $M$  est de la forme  $h(X)(n)$  où  $X$  est projective lisse. La formule résulte alors de [60, cor. 3.2.7] et du théorème de simplification [62], qui est maintenant valable sur un corps parfait quelconque.  $\square$

Le théorème suivant est une variation sur le thème de [48, th. 2.49].

**5.13. Théorème.** — *La catégorie triangulée  $\mathcal{D}''$  est semi-simple : tout triangle exact est somme directe de triangles scindés. Le foncteur  $\delta$  induit une équivalence de catégories*

$$\begin{aligned} \Delta : (\mathcal{A}'')^{(\mathbf{N})} &\rightarrow \mathcal{D}'' \\ (M_i) &\mapsto \bigoplus_i \delta(M_i)[i]. \end{aligned}$$

**Démonstration.** En quatre étapes :

1)  $\Delta$  est pleinement fidèle. En effet, pour  $(M_i), (N_i) \in (\mathcal{A}'')^{(\mathbf{N})}$ , on a

$$(\mathcal{A}'')^{(\mathbf{N})}((M_i), (N_i)) = \bigoplus_i (\mathcal{A}'')(M_i, N_i)$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{D}''\left(\bigoplus_i \delta(M_i)[i], \bigoplus_j \delta(N_j)[j]\right) &= \bigoplus_{i,j} \mathcal{D}''(\delta(M_i), \delta(N_j)[j-i]) \\ &= \bigoplus_i \mathcal{D}''(\delta(M_i), \delta(N_i)) = \bigoplus_i (\mathcal{A}'')(M_i, N_i) \end{aligned}$$

par la proposition 5.12.

2) L'image essentielle de  $\Delta$  est stable par triangles. Cela résulte facilement du fait que dans une catégorie abélienne semi-simple, tout morphisme est somme directe d'un morphisme nul et d'un isomorphisme (cf. par exemple [1, lemme A.2.13]).

3)  $\Delta$  est essentiellement surjectif. Cela découle de 2) et de la définition de  $\mathcal{D}''$ .

4) Il reste à voir que  $\mathcal{D}''$  est semi-simple : cela découle encore de [1, lemme A.2.13].  $\square$

**5.14. Corollaire.** — *Le foncteur  $\delta$  induit une équivalence de catégories*

$$D^b(\mathcal{A}'') \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}''.$$

**Démonstration.** En effet, puisque  $\mathcal{A}''$  est semi-simple,  $D^b(\mathcal{A}'')$  coïncide avec le membre de gauche de l'équivalence de catégories  $\Delta$  du théorème 5.13.  $\square$

**5.15. Corollaire.** — *Soit  $U \in Sm/k$  tel que  $M(U) \in \mathcal{D}''$ . Alors, pour tout  $l \neq p$ , l'action de Frobenius sur  $H_c^*(\overline{U}, \mathbf{Q}_l)$  est semi-simple. De plus, le polynôme caractéristique de cette action est indépendant de  $l$ .*

**Démonstration.** Soit  $d = \dim U$ . Par le théorème 5.13, on peut écrire  $M(U) := M(U)^*(d)[2d]$  comme somme directe de motifs de la forme  $\delta(M)[i]$ , avec  $M \in \mathcal{A}''$ . Le corollaire résulte alors du lemme 5.1 (pour l'indépendance de  $l$ ) et du fait que  $\mathcal{A}'' \subset \mathcal{A}_{s,l}$  (pour la semi-simplicité).  $\square$

Nous ne sommes pas en mesure d'appliquer directement le corollaire 5.15 à un ouvert d'une surface abélienne. Toutefois, on peut lui appliquer la même méthode, au prix d'un petit effort.

**5.16. Proposition.** — *Soit  $X \in B_{\text{tate}}(k)$ , avec  $d = \dim X \leq 2$ . Alors tout ouvert dense  $U$  de  $X$  vérifie la conclusion du corollaire 5.15.*

**Démonstration.** Le cas  $d \leq 1$  est facile et laissé au lecteur. Supposant  $d = 2$ , montrons que  $M^c(U)$  est somme directe de motifs de la forme  $\delta(M)[i]$ , avec  $M \in \mathcal{A}'$ . Par récurrence noethérienne, il suffit de montrer que, si  $U = U' - Z$  avec  $U'$  ouvert et  $Z$  fermée lisse, l'énoncé pour  $U'$  implique l'énoncé pour  $U$ . Notons donc  $M(U') = \bigoplus \delta(M_\alpha)[i_\alpha]$ ,  $M_\alpha \in \mathcal{A}'$ .

Supposons d'abord  $\dim Z = 1$ . Considérons la complétée projective lisse  $C$  de  $Z$  : on a

$$\mathcal{D}(M(C), M(U')) = \bigoplus \mathcal{D}(M(C), \delta(M_\alpha)[i_\alpha]).$$

En utilisant le fait que la conjecture de Tate est vraie pour les produits de 3 courbes [53, th. 3], le raisonnement de la démonstration du corollaire 2.3 montre que  $\mathcal{D}(M(C), \delta(M_\alpha)[i_\alpha]) = 0$  pour  $i_\alpha \neq 0$ . Pour  $i_\alpha = 0$ , on obtient en utilisant [62] des isomorphismes

$$\overline{\mathcal{A}}(\overline{h}(C), M_\alpha) \xleftarrow{\sim} \mathcal{A}(h(C), M_\alpha) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}(M(C), \delta(M_\alpha)).$$

Par semi-simplicité de  $\overline{\mathcal{A}}$ , tout morphisme de  $M(C)$  vers  $\delta(M_\alpha)$  est donc somme directe d'un morphisme nul et d'un isomorphisme. On en déduit le pas de récurrence par dévissage (utilisant le triangle exact de Gysin de [60, prop. 3.5.4]). Le cas où  $\dim Z = 0$  est semblable et plus facile.  $\square$

## 6. Prospective

Rappelons le résultat principal de [31] :

**6.1. Théorème** ([31, th. 3.4]). — *Les trois conjectures suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Le théorème 1.8 (avec  $X' = \text{Spec } k$ ) et le corollaire 2.1 sont vrais pour toute  $k$ -variété projective lisse  $X$ .*
- (ii) *Pour tout  $n > 0$ , le morphisme  $\Phi_n$  du lemme 3.5 (relatif à un nombre premier  $l \neq p$  donné) est un quasi-isomorphisme.*
- (iii) *Pour tout  $n > 0$ , le complexe  $\mathbf{Z}_l(n)_{\text{ét}}^c$  (relatif à un nombre premier  $l \neq p$  donné) est malléable (voir [31, d'ef. 2.16] pour la définition de malléable).*

Les méthodes précédentes conduisent en fait à d'autres formulations de ces conjectures :

**6.2. Théorème.** — *Les conjectures du théorème 6.1 sont encore équivalentes aux suivantes :*

- (iv) *Pour tout  $n > 0$ , le morphisme (3.4) (relatif à un nombre premier  $l \neq p$  donné) est un quasi-isomorphisme dans  $\bar{D}(\mathcal{T}_{\mathbf{Z}})$  (cf. mise en garde 3.2.1).*
- (iv bis) *Pour tout  $n > 0$ , le morphisme (3.5) ou (3.8) (relatif à un nombre premier  $l$  donné) est un isomorphisme pour toute  $k$ -variété projective lisse  $X$ .*
- (iv ter) *Pour tout  $n > 0$ , tout nombre premier  $l$  et toute  $k$ -variété projective lisse  $X$ , les morphismes (3.5) et (3.8) sont des isomorphismes.*
- (v) *Pour toute  $k$ -variété projective lisse  $X$ , les groupes  $H_W^i(X, \mathbf{Z}(n))$  sont de type fini.*
- (v bis) *Pour toute  $k$ -variété lisse  $X$ , les groupes  $H_W^i(X, \mathbf{Z}[1/p](n))$  sont des  $\mathbf{Z}[1/p]$ -modules de type fini.*
- (v ter) *Pour toute  $k$ -variété projective lisse  $X$ , les groupes  $H_W^i(X, \mathbf{Z}_{(l)}(n))$  sont des  $\mathbf{Z}_{(l)}$ -modules de type fini, où  $l$  est un nombre premier donné.*
- (vi) *Pour toute  $k$ -variété projective lisse  $X$ , la forme forte de la conjecture de Tate (concernant  $\zeta(X, s)$ ) est vraie et le motif de Chow  $h(X)$  est de dimension finie au sens de Kimura<sup>(5)</sup>. (Avec les notations du théorème 5.3 :  $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$ .)*

<sup>(5)</sup>Kimura conjecture le second énoncé sur tout corps de base : cela résulterait des conjectures standard et de l'existence d'une décomposition de Chow-Künneth à la Murre, cf. [1, ex. 9.2.4]

(vi bis) *Pour toute  $k$ -variété projective lisse  $X$ , la forme forte de la conjecture de Tate est vraie et l'algèbre des correspondances de Chow  $A = CH^{\dim X}(X \times X) \otimes \mathbf{Q}$  est semi-primaire : son radical de Jacobson  $R$  est nilpotent et  $A/R$  est semi-simple.*

(vi ter) *La conjecture de Tate (cohomologique, relative à un nombre premier  $l$  donné) est vraie pour les  $k$ -variétés abéliennes et la catégorie rigide  $\mathcal{A}$  des  $k$ -motifs de Chow à coefficients rationnels est engendrée par les motifs de variétés abéliennes et les motifs d'Artin.*

(vi quater) *La forme forte de la conjecture de Tate est vraie pour toutes les variétés projectives lisses et il n'existe pas de "motif de Chow fantôme" : Si  $M \in \mathcal{A}$  est tel que  $\bar{M} = 0$  dans  $\bar{\mathcal{A}}$ , alors  $M = 0$ .*

**Démonstration.** (ii)  $\iff$  (iv) : cela résulte du lemme 3.5, puisque le foncteur  $\bar{R}\gamma_*$  est conservatif.

(i)  $\implies$  (iv ter) : on procède comme dans la preuve du théorème 3.6.

(iv ter)  $\implies$  (v) : on procède comme dans la preuve du corollaire 3.8.

(v)  $\implies$  (v bis) : on procède comme dans la démonstration du lemme 4.3.

(v bis)  $\implies$  (v ter) pour  $l \neq p$  : c'est évident.

(v)  $\implies$  (v ter) : c'est évident.

(v ter)  $\implies$  (iv bis) : notons  $K(n)$  le cône de (3.4). L'hypothèse implique que, pour toute  $k$ -variété projective lisse  $X$ , les groupes  $\mathbb{H}(X, K(n))$  sont des  $\mathbf{Z}_l$ -modules de type fini. D'autre part, on sait que  $(3.4) \otimes^L \mathbf{Z}/l$  est un quasi-isomorphisme ([17, th. 1.5] ou [16] selon que  $l \neq p$  ou que  $l = p$ ). Par conséquent, les  $\mathbb{H}_V(X, K(n))$  sont uniquement divisibles, donc nuls.

(iv bis)  $\implies$  (iv) : on procède comme dans [31, lemme 3.8] : réduction à  $(3.4) \otimes \mathbf{Q}$ , puis pureté et théorème de de Jong.

(i)  $\implies$  (vi ter) : la première partie de (vi ter) résulte de (i) d'après [59]. La deuxième partie est une conséquence classique de la conjecture de Tate forte pour toutes les variétés (qui résulte de (i)) pour  $\bar{\mathcal{A}}$ , cf. [48, rem. 2.7] ; mais (i) implique que  $\mathcal{A} \rightarrow \bar{\mathcal{A}}$  est une équivalence de catégories.

(vi ter)  $\implies$  (vi) : c'est clair, puisque le motif d'une variété abélienne est de dimension finie au sens de Kimura [35, ex. 9.1], ainsi que tout motif d'Artin, que la forme forte de la conjecture de Tate résulte de la forme cohomologique et de la semi-simplicité de l'action de Frobenius sur la cohomologie [59], et que cette dernière est vraie pour les variétés abéliennes [63].

(vi)  $\implies$  (vi bis) : cela résulte de [1, prop. 9.1.14] et du théorème de Jannsen [22].

(vi bis)  $\implies$  (i) : on procède comme dans la démonstration du théorème 1.8 et du corollaire 2.1.

(i)  $\implies$  (vi quater) est clair. (vi quater)  $\implies$  (vi ter) : notons  $\mathcal{A}_{\text{ab}}$  la sous-catégorie rigide de  $\mathcal{A}$  engendrée par les motifs de variétés abéliennes et les motifs d'Artin, et  $\bar{\mathcal{A}}_{\text{ab}}$  son image dans  $\bar{\mathcal{A}}$ . La forme forte de la conjecture de Tate implique que  $\bar{\mathcal{A}}_{\text{ab}} = \bar{\mathcal{A}}$  (voir ci-dessus). Soit  $X$  une variété projective lisse : il existe des isomorphismes inverses  $\bar{f} : \bar{h}(X) \xrightarrow{\sim} \bar{N}$ ,  $\bar{g} : \bar{N} \xrightarrow{\sim} \bar{h}(X)$ , avec  $N \in \mathcal{A}_{\text{ab}}$ . Relevons  $\bar{f}$  et  $\bar{g}$  en des morphismes  $f, g$  de  $\mathcal{A}$ . Comme  $N$  est de dimension finie au sens de Kimura, l'algèbre  $\mathcal{A}(N, N)$  est semi-primaire, donc  $1_N - fg$  est nilpotent et quitte à modifier  $f$  ou  $g$  on peut supposer que  $fg = 1_N$ . On a alors  $h(X) \simeq N \oplus M$ , avec  $M$  fantôme.  $\square$

La formulation de la conjecture des théorèmes 6.1 et 6.2 qui nous semble la plus prometteuse est (vi ter), mais nous nous garderons bien de faire une conjecture sur la démonstration d'une conjecture !

## Appendice A

### Fonctorialité de la cohomologie motivique étale

Soient  $k$  un corps commutatif et  $\mathcal{V}$  la catégorie des  $k$ -variétés projectives lisses. Pour qu'une "théorie cohomologique"  $X \mapsto H(X)$  permette de définir une catégorie additive monoïdale symétrique de correspondances  $\mathcal{C}$  à partir de  $\mathcal{V}$ , avec  $\mathcal{C}(X, Y) = H(X \times_k Y)$ , il suffit (et il faut, essentiellement) qu'elle possède la functorialité suivante :

- a) Images inverses pour les morphismes de projection
- b) Images directes pour les morphismes de projection
- c) Cup-produits

soumise aux relations suivantes :

- (i) a) est fonctoriel
- (ii) b) est fonctoriel
- (iii) c) est associatif et commutatif
- (iv) a) commute à c)
- (v) Condition d'échange pour a) et b)
- (vi) a), b) et c) interagissent via la formule de projection.

Pour que  $H$  permette de plus de définir une catégorie de motifs (rigide)  $\mathcal{M}$ , il suffit qu'elle vérifie une "formule du fibre projectif" pour  $(\mathbb{P}^1)$ .

Enfin, si  $U : X \mapsto U(X)$  est une "théorie cohomologique" sur  $\mathcal{V}$  telle que  $H \oplus U$  possède la functorialité ci-dessus, le cup-produit étant identiquement

nul sur la composante  $U \otimes U$  (c'est-à-dire que  $U$  est un “module” sur  $H$ ), alors  $U$  s'étend en un foncteur additif sur  $\mathcal{M}$ .

Lorsque  $H(X) = CH(X)$  (anneau de Chow), la functorialité ci-dessus résulte de la théorie de l'intersection. Pour donner un sens à la catégorie  $\text{Chow}_{\text{ét}}^*(k)$  de la définition 5.6, il faut la justifier pour  $H(X) = \bigoplus H_{\text{ét}}^{2n}(X, \mathbf{Z}(n))$  : c'est l'objet de cet appendice. Pour cela, nous justifierons cette functorialité pour tous les “groupes de Chow supérieurs étales  $H_{\text{ét}}^i(X, \mathbf{Z}(n))$ ” : en effet nous n'avons pas trouvée de méthode plus simple que de traiter ce cas général.

On note  $\alpha$  la projection du gros site étale de  $\text{Spec } k$  sur son gros site Zariski, et  $\alpha_U$  la restriction de  $\alpha$  au petit site étale d'un  $k$ -schéma  $U$ . Comme d'habitude, on pose  $\mathbf{Z}(n)_U^{\text{ét}} = \alpha^* \mathbf{Z}(n)_U$  pour  $n \geq 0$  et  $\mathbf{Z}(n)_U^{\text{ét}} = (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(n)_U[-1]$  pour  $n < 0$ , de sorte qu'on a des morphismes canoniques

$$(A.1) \quad (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(n)_U \rightarrow \mathbf{Z}(n)_U^{\text{ét}}[1]$$

pour tout  $U \in (\text{Spec } k)_{\text{ét}}$  et tout  $n \in \mathbf{Z}$ .

**A.1. Functorialité des groupes de Chow supérieurs.** — Nous nous reposerons sur la functorialité correspondante pour les groupes  $H_{\text{Zar}}^i(X, \mathbf{Z}(n))$ . Cette functorialité n'est que partiellement redigée :

- a) est construit pour tout morphisme vers une  $k$ -variété lisse dans [39, partie I, ch II, 3.5], et indépendamment par Bloch (non publiée). Ceci corrige une démonstration incomplète de [4].
- b) est élémentaire et existe pour tout morphisme propre [4].
- c) est construit sur toute variété lisse dans [17, §8], corrigeant la construction incomplète de [4].
- (i) est vérifiée pour des morphismes entre variétés lisses dans [31, 1.2] (cf. th. 1.17 de *loc. cit.*).
- (ii) est élémentaire modulo les relations habituelles de multiplicités.
- (iii) est brièvement mentionnée à la fin de [17, §8].
- (iv), (v) et (vi) ne sont pas redigés. Marc Levine m'a informé qu'ils seront incorporés à [41], ainsi qu'une version détaillée de (iii).

Dans ce qui suit, nous admettons les compatibilités (iii), (iv), (v) et (vi) ci-dessus. La situation est la suivante : à partir du cas Zariski, la construction de a) et c) en cohomologie motivique étale est “formelle”, ainsi que la vérification de (i) et (iii). En revanche, la construction de b) n'est pas formelle : nous la réaliserons pour tout morphisme projectif par réduction aux immersions fermées et aux projections à partir d'un espace projectif.

**A.2. a) : images inverses.** — La définition en cohomologie de Zariski est obtenue à partir de zig-zags finis entre complexes explicites. Il suffit de vérifier que ces constructions commutent à la localisation étale, ce qui est immédiat.

**A.3. i) : functorialité des images inverses.** — Même justification que ci-dessus.

**A.4. c) : produits.** — Même justification (contempler par exemple le zig-zag de [17, (8.1)] pour deux  $k$ -schémas  $X, Y$  essentiellement de type fini et deux entiers  $q, q'$  :

$$\begin{aligned} z^q(X, *) \otimes z^{q'}(Y, *) &\rightarrow \text{Tot } z^{q+q'}(X \times Y, *, *) \leftarrow \text{Tot } z^{q+q'}(X \times Y, *, *)_{\mathcal{T}} \\ &\rightarrow z^{q+q'}(X \times Y, *). \end{aligned}$$

**A.5. iii) : associativité, commutativité et iv) : compatibilité de a) et c).** — Même justification.

**A.6. Formule du fibré projectif.** — Soient  $E$  un fibré vectoriel sur une  $k$ -variété lisse  $Y$  et  $p : \mathbf{P}(E) \rightarrow Y$  la projection. En procédant comme dans [28, §5], on construit des isomorphismes

$$\bigoplus_{j=0}^{N-1} \mathbf{Z}(n-j)_Y^{\text{ét}}[-2j] \xrightarrow{\sim} R p_* \mathbf{Z}(n)_{\mathbf{P}(E)}^{\text{ét}}$$

avec  $N = \dim E$ . Plus précisément, le morphisme ci-dessus est construit à l'aide du cup-produit avec les puissances de  $c_1(\mathcal{O}_{\mathbf{P}(E)}(1))$  ; il suffit de voir que c'est un isomorphisme après tensorisation par  $\mathbf{Q}$  ou par  $\mathbf{Z}/l$  pour un nombre premier  $l$  quelconque. Dans le premier cas, c'est vrai grâce à la proposition 3.1 par réduction aux groupes de Chow supérieurs [4, th. 7.1]. Dans le deuxième cas, c'est vrai pour  $l \neq \text{car } k$  grâce à [17] par réduction à la cohomologie étale [25, th. 2.2.1], et pour  $l = \text{car } k$  grâce à [16] par réduction à la cohomologie de Hodge-Witt logarithmique [20, cor. I.2.1.12].

**A.7. b) : images directes.** — Soit maintenant  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme projectif entre deux  $k$ -variétés lisses. Nous nous proposons de construire des morphismes

$$f_* : H_{\text{ét}}^i(X, \mathbf{Z}(n)) \rightarrow H_{\text{ét}}^{i+2c}(Y, \mathbf{Z}(n+c))$$

pour tout  $(i, n) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ , où  $c = \dim Y - \dim X$ .

*A.7.1. Cas d'une immersion fermée.* — Supposons que  $f$  soit une immersion fermée. On procède comme dans [28, §4]. Supposons d'abord  $n \geq 0$ . En utilisant la transformation naturelle canonique  $\alpha_X^* f_{\text{Zar}}^! \rightarrow f_{\text{ét}}^! \alpha_P^*$  et le théorème de localisation pour les groupes de Chow supérieurs, on obtient des morphismes

$$(A.2) \quad \mathbf{Z}(n)_X^{\text{ét}} \rightarrow Rf_{\text{ét}}^! \mathbf{Z}(n+c)_Y^{\text{ét}}[2c].$$

(Ces morphismes ne sont pas des isomorphismes en l'exposant caractéristique de  $k$ , cf. [28, Theorem 4.2 b].) Pour  $n$  quelconque, on a par pureté de la cohomologie étale à coefficients finis des morphismes

$$(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(n)_X \xrightarrow{\sim} Rf^!(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(n+c)_Y[2c].$$

En composant avec (A.1), cela fournit des morphismes (A.2) également pour  $n < 0$ . Ceci définit  $f_*$ . Par construction, on a

$$(A.3) \quad (gf)_* = g_* f_* \text{ si } f \text{ et } g \text{ sont deux immersions fermées composables.}$$

Étant donné un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ g' \downarrow & & g \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

avec  $f$  (donc  $f'$ ) immersion fermée, on a aussi la *condition d'échange*

$$(A.4) \quad g^* f_* = f'_*(g')^* : H_{\text{ét}}^i(X, \mathbf{Z}(n)) \rightarrow H^{i+2c}(Y', \mathbf{Z}(n+c)).$$

Pour  $n < 0$ , elle résulte de la formule correspondante en cohomologie étale à coefficients finis; pour  $n > 0$  elle s'obtient par faisceautisation étale de la même formule au niveau des complexes de faisceaux Zariski.

Par la même méthode on a l'identité, pour une immersion fermée  $f$

$$(f \times 1)_*(x \boxtimes y) = f_* x \boxtimes y$$

où  $\boxtimes$  désigne le produit externe ("cross-produit"), d'où l'on déduit<sup>(6)</sup> par pull-back via la diagonale la *formule de projection*

$$(A.5) \quad f_*(x \cdot f^* y) = f_* x \cdot y.$$

*A.7.2. Cas d'une projection.* — Supposons que  $f$  soit la projection  $Y \times \mathbf{P}^{-c} \rightarrow Y$ . On définit  $f_*$  via la projection du membre de droite de l'isomorphisme de A.6 sur la composante  $j = -c$  du membre de gauche.

<sup>(6)</sup>Je remercie Marc Levine de m'avoir indiqué cette astuce.

A.7.3. *Cas général.* — Par hypothèse,  $f$  se factorise en

$$X \xrightarrow{i} Y \times \mathbf{P}^n \xrightarrow{\pi} Y$$

où  $i$  est une immersion fermée et  $\pi$  est la première projection. On définit  $f_* := \pi_* i_*$ .

A.7.4. *Indépendance du choix de la factorisation.* — Soit  $X \xrightarrow{i'} Y \times \mathbf{P}^m \xrightarrow{\pi'} Y$  une autre telle factorisation. On a des immersions fermées canoniques  $a : \mathbf{P}^n \rightarrow \mathbf{P}^{m+n+1}$  et  $a' : \mathbf{P}^m \rightarrow \mathbf{P}^{m+n+1}$ . Notons  $\pi'' : Y \times \mathbf{P}^{m+n+1} \rightarrow Y$  la première projection. En tenant compte de (A.3), cette construction réduit la question à démontrer les formules  $\pi_* = \pi''_* a_*$  et  $\pi'_* = \pi''_* a'_*$ . En d'autres termes, on est ramené au cas particulier où  $i$  est une inclusion  $Y \times \mathbf{P}^n \rightarrow Y \times \mathbf{P}^m$ , donnée par l'inclusion canonique  $\mathbf{P}^n \rightarrow \mathbf{P}^m$  ( $n \leq m$ ).

Soit  $\xi = c_1(\mathcal{O}_X(1)) \in H_{\text{ét}}^2(X, \mathbf{Z}(1))$ . L'assertion résulte de la formule du fibré projectif (appliquée à  $X = Y \times \mathbf{P}^n$  et à  $Y \times \mathbf{P}^m$ ) et de la formule

$$i_*(\xi^j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j < -c \\ 1 & \text{si } j = -c. \end{cases}$$

Cette propriété est bien connue au niveau des groupes de Chow : elle résulte par exemple de la functorialité covariante de ces derniers (cf. [12, prop. 3.1 a)). Mais  $CH^1(X) \xrightarrow{\sim} H_{\text{ét}}^2(X, \mathbf{Z}(1))$ , donc elle en résulte pour la cohomologie motivique étale par functorialité.

**A.8. (ii) : functorialité.** — Soient  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow Z$  deux morphismes projectifs, munis de décompositions  $f = \pi i$ ,  $g = \pi' i'$  comme ci-dessus. Nous voulons montrer que  $(gf)_* = g_* f_*$ . Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Y \times \mathbf{P}^m & \xrightarrow{i''} & Z \times \mathbf{P}^m \times \mathbf{P}^n & \xrightarrow{S} & Z \times \mathbf{P}^{mn+m+n} \\
 & \nearrow i & \downarrow \pi & & \downarrow \pi'' & & \\
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{i'} & Z \times \mathbf{P}^n & & \\
 & & \searrow g & & \downarrow \pi' & \swarrow \Pi & \\
 & & & & Z & & 
 \end{array}$$

où le carré central est cartésien et  $S$  est donné par le plongement de Segre. Comme par A.7.4 on a  $f_* = \pi_* i_*$ ,  $g_* = \pi'_* i'_*$  et  $(gf)_* = \Pi_*(S i'' i)_*$ , en tenant

de plus compte de (A.3), ce diagramme nous réduit à démontrer les deux formules :

- (i)  $i'_* \pi_* = \pi''_* i''_*$ ;
- (ii)  $\pi'_* \pi''_* = \Pi_* S_*$ .

**A.8.1. Cas de (i).** — Soit  $\xi = c_1(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^m}(1))$  : la formule du fibr e projectif pour  $\pi$  et pour  $\pi''$  s'exprime en fonction des pull-backs de  $\xi$ . L'assertion résulte donc de la formule de projection (A.5), appliquée avec  $f = \mathcal{I}$ .

**A.8.2. Cas de (ii).** — Soient  $\xi = c_1(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^m}(1))$ ,  $\xi' = c_1(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1))$  et  $\xi'' = c_1(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{mn+m+n}}(1))$ . En utilisant la formule du fibr e projectif, on a pour  $z \in H_{\text{ t}}^*(Z, \mathbf{Z}(*))$

$$\pi'_* \pi''_* ((\pi' \pi'')^* z \cdot \xi^a \cdot (\xi')^b) = \begin{cases} 0 & \text{si } (a, b) \neq (m, n) \\ z & \text{si } (a, b) = (m, n) \end{cases}$$

et de même

$$\Pi_*(\Pi^* z \cdot (\xi'')^c) = \begin{cases} 0 & \text{si } c \neq mn + m + n \\ z & \text{si } c = mn + m + n. \end{cases}$$

En utilisant de nouveau la formule de projection, il s'agit de montrer que, dans l'écriture de  $S(\xi^a \cdot (\xi')^b)$  sur la base des  $(\xi'')^c$ , le coefficient de  $(\xi'')^{mn+m+n}$  est 0 si  $(a, b) \neq (m, n)$  et 1 si  $(a, b) = (m, n)$ . Mais il s'agit là d'un calcul dans l'anneau de Chow, et le résultat est vrai par functorialité covariante des groupes de Chow.

**A.9. (v) : condition d'échange.** — Il s'agit d'étendre (A.4) au cas où  $f$  (donc  $f'$ ) est projectif.  tant donn e A.7.1, on se réduit au cas où  $f$  est une projection  $Y \times \mathbf{P}^n \rightarrow Y$ . C'est alors immédiat étant donn e la formule du fibr e projectif et A.5.

**A.10. (vi) : formule de projection.** — Il s'agit de généraliser (A.5)   un morphisme projectif quelconque. Même réduction et justifications qu'en A.9.

**A.11. Cas de la cohomologie de Lichtenbaum (justification de la proposition 5.7).** — Mêmes méthodes, en étendant la formule du fibr e projectif à cette cohomologie. Pour ceci, on construit des morphismes comme dans A.6 pour la cohomologie de Lichtenbaum. On démontre que ce sont des isomorphismes par réduction au cas étale grâce à (3.2).

## Références

- [1] Y. André, B. Kahn *Nilpotence, radicaux et structures monodiales*, prépublication, 2001 (rév. 2002), ArXiv math.CT/0203273.
- [2] A. A. Beilinson *Height pairings between algebraic cycles*, Lect. Notes in Math. **1289**, Springer, 1987, 1–26.
- [3] S. Bloch *Torsion algebraic cycles and a theorem of Roïtman*, Compos. Math. **39** (1979), 107–127.
- [4] S. Bloch *Algebraic cycles and higher K-theory*, Adv. Math. **61** (1986), 267–304.
- [5] S. Bloch *Algebraic cycles and the Beilinson conjectures*, The Lefschetz centennial conference (Mexico City, 1984), Contemp. Math. **58** (I), AMS, 1986, 65–79.
- [6] S. Bloch, S. Lichtenbaum *A spectral sequence for motivic cohomology*, prépublication, 1996.
- [7] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, C. Soulé *Torsion dans le groupe de Chow de codimension 2*, Duke Math. J. **50** (1983), 763–801.
- [8] P. Deligne, N. Katz *Groupes de Monodromie en géométrie algébrique (SGA 7), II*, Lect. Notes in Math. **340**, Springer, 1973.
- [9] P. Deligne et al. *Cohomologie étale (SGA 4 1/2)*, Lect. Notes in Math. **569**, Springer, 1977.
- [10] P. Deligne *La conjecture de Weil, I*, Publ. Math. IHES **43** (1974), 5–77.
- [11] E. Friedlander, A. Suslin *The spectral sequence relating algebraic K-theory and motivic cohomology*, `a para^ı tre aux Ann. Ec. Norm. Sup.
- [12] W. Fulton, *Intersection theory*, Springer, 1984.
- [13] O. Gabber *Sur la torsion dans la cohomologie l-adique d'une variété*, C. R. Acad. Sci. Paris **297** (1983), 179–182.
- [14] T. Geisser *Tate's conjecture, algebraic cycles and rational K-theory in characteristic p*, K-Theory **13** (1998), 109–122.
- [15] T. Geisser *Weil-étale motivic cohomology*, prépublication, 2002.
- [16] T. Geisser, M. Levine, *The K-theory of fields in characteristic p*, Invent. Math. **139** (2000), 459–493.
- [17] T. Geisser, M. Levine, *The Bloch-Kato conjecture and a theorem of Suslin-Voevodsky*, J. reine angew. Math. **530** (2001), 55–103.
- [18] H. Gillet *Gersten's conjecture for the K-theory with torsion coefficients of a discrete valuation ring*, J. Alg. **103** (1986), 377–380.
- [19] D. Grayson *Finite generation of the K-groups of a curve over a finite field (after D. Quillen)*, Lect. Notes in Math. **966**, Springer, 1982, 69–90.

- [20] M. Gros *Classes de Chern et classes de cycles en cohomologie de Hodge-Witt logarithmique*, Mém. Soc. Math. France **21**, 1985.
- [21] G. Harder *Die Kohomologie  $S$ -arithmetischer Gruppen über Funktionenkörpern*, Invent. Math. **42** (1977), 135–175.
- [22] U. Jannsen, *Motives, numerical equivalence and semi-simplicity*, Invent. Math. **107** (1992), 447–452.
- [23] R. de Jeu *On  $K_4^{(3)}$  of curves over number fields*, Invent. Math. **125** (1996), 523–556.
- [24] P.A. de Jong *Smoothness, semi-stability and alterations*, Publ. Math. IHES **83** (1996), 51–93.
- [25] J.-P. Jouanolou *Cohomologie de quelques schémas classiques et théorie cohomologique des classes de Chern*, Exposé 7 in Séminaire de Géométrie algébrique du Bois-Marie (SGA5), Lect. Notes in Math. **589**, Springer, 1977, 282–350.
- [26] B. Kahn  *$K_3$  d'un schéma régulier*, C. R. Acad. Sci. Paris **315** (1992), 433–436.
- [27] B. Kahn *Deux théorèmes de comparaison en cohomologie étale ; applications*, Duke Math. J. **69** (1993), 137–165.
- [28] B. Kahn *Applications of weight-two motivic cohomology*, Doc. Math. **1** (1996), 395–416.
- [29] B. Kahn *A sheaf-theoretic reformulation of the Tate conjecture*, prépublication de l'Institut de Mathématiques de Jussieu no 150, 1998, ArXiv math.AG/9801017.
- [30] B. Kahn  *$K$ -theory of semi-local rings with finite coefficients and étale cohomology*,  $K$ -theory **25** (2002), 99–139.
- [31] B. Kahn *The Geisser-Levine method revisited and algebraic cycles over a finite field*, à paraître aux Math. Ann.
- [32] B. Kahn *Calculations in étale cohomology*, prépublication, 2001.
- [33] T. Katsura, T. Shioda *On Fermat varieties*, Tôhoku Math. J. **31** (1979), 97–115.
- [34] N. Katz, W. Messing *Some consequences of the Riemann hypothesis for varieties over finite fields*, Invent. Math. **23** (1974), 73–77.
- [35] S.I. Kimura, *Chow motives can be finite-dimensional, in some sense*, à paraître au J. of Alg. Geom.
- [36] S. Kleiman *Motives*, Algebraic geometry, Oslo 1970 (Proc. Fifth Nordic Summer-School in Mathematics), pp. 53–82, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1972.
- [37] C. Kratzer  *$\lambda$ -structure en  $K$ -théorie algébrique*, Comment. Math. Helv. **55** (1970), 233–254.

- [38] H.W. Lenstra, Y.G. Zarhin *The Tate conjecture for almost ordinary abelian varieties over finite fields*, Advances in number theory (Kingston, ON, 1991), Oxford Univ. Press, 1993, 179–194.
- [39] M. Levine *Mixed motives*, Mathematical Surveys and Monographs **57**, AMS, Providence, 1998.
- [40] M. Levine *K-theory and motivic cohomology of schemes, I*, prépublication, 2001.
- [41] M. Levine *K-theory and motivic cohomology of schemes, II*, en préparation.
- [42] S. Lichtenbaum *Values of zeta functions at non-negative integers*, Lect. Notes in Math. **1068**, Springer, 1984, 127–138.
- [43] S. Lichtenbaum *The Weil-étale topology*, prépublication, 2001.
- [44] A. Merkurjev, A. Suslin *K-cohomologie des variétés de Severi-Brauer et homomorphisme de reste normique* (en russe), Izv. Akad. Nauk. SSSR **46** (1982), 1011–1046. Traduction anglaise : Math. USSR Izvestiya **21** (1983), 307–340.
- [45] A.S. Merkurjev, A.A. Suslin *Le groupe  $K_3$  pour un corps* (en russe), Izv. Akad. Nauk SSSR **54** (1990), 339–356. Trad. anglaise : Math. USSR Izv. **36** (1990), 541–565.
- [46] J. S. Milne *Values of zeta functions of varieties over finite fields*, Amer. J. Math. **108** (1986), 297–360.
- [47] J. S. Milne *Motivic cohomology and values of the zeta function*, Compositio Math. **68** (1988), 59–102.
- [48] J. S. Milne *Motives over finite fields*, in *Motives* (Seattle, WA, 1991), Proc. Sympos. Pure Math., **55**, Part 1 (1994), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 401–459.
- [49] J. S. Milne *Lefschetz motives and the Tate conjecture*, Composition Math. **117** (1999), 47–81.
- [50] J. S. Milne *The Tate conjecture for certain abelian varieties over finite fields*, Acat Arith. **100** (2001), 135–166.
- [51] J. S. Milne, N. Ramachandran *Integral motives and special values of zeta functions*, prépublication, 2002 (version préliminaire), ArXiv math.NT/0204065.
- [52] D. Quillen *On the cohomology and the K-theory of the general linear group over a finite field*, Ann. of Math. **96** (1972), 179–198.
- [53] C. Soulé *Groupes de Chow et K-théorie de variétés sur un corps fini*, Math. Ann. **268** (1984), 317–345.
- [54] C. Soulé *Opérations en K-théorie algébrique*, Can. Math. J. **37** (1985), 488–550.
- [55] M. Spieß *Proof of the Tate conjecture for products of elliptic curves over finite fields*, Math. Ann. **314** (1999), 285–290.

- [56] A. Suslin *Algebraic K-theory of fields*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Berkeley, 1986, 222–244.
- [57] J.T. Tate *Algebraic cycles and poles of zeta functions*, Arithmetical Algebraic Geometry (Proc. Conf. Purdue Univ., 1963), 1965, 93–110.
- [58] J.T. Tate *Endomorphisms of abelian varieties over finite fields*, Invent. Math. **2** (1966), 134–144.
- [59] J.T. Tate *Conjectures on algebraic cycles in  $l$ -adic cohomology*, in Motives, Proc. Symposia Pure Math. **55** (1), AMS, 1994, 71–83.
- [60] V. Voevodsky *Triangulated categories of motives over a field*, in Cycle, transfers and motivic cohomology theories, Annals of Math. Studies **143**, 2000.
- [61] V. Voevodsky *The Milnor conjecture*, prépublication, 1996.
- [62] V. Voevodsky *Cancellation theorem*, prépublication, 2002.
- [63] A. Weil *Courbes algébriques et variétés abéliennes*, Hermann, 1954.
- [64] Y.G. Zarhin *Abelian varieties of K3 type*, Séminaire de théorie des nombres, Paris, 1990–91, Progr. Math. **108**, Birkhäuser, 1992, 263–279.

---

20 juillet 2002

BRUNO KAHN, Institut de Mathématiques de Jussieu, 175–179 rue du Chevaleret,  
75013 Paris, France. • *E-mail* : kahn@math.jussieu.fr