Réalisation ℓ-adique des motifs triangulés géométriques II

Florian Ivorra

Abstract. For geometrical triangulated motives with rational coefficients over a ground field of characteristic zero which is embeddable into $\mathbb{C}$, A. Huber has constructed in [16, 17] a realization functor with values in the category of mixed realization of [15]. In this sequel to [19], we prove that the ℓ-adic realization functor obtained in theorem 4.3 of [19] is the same up to a canonical isomorphism than the ℓ-adic component of A. Huber's construction. In this way [19] might be viewed as an integral generalization to all noetherian separed schemes of the work [16, 17] as far as the ℓ-adic setting is concerned. We also prove a comparison theorem with the classical ℓ-adic cycle class map over a perfect field using an naive motivic cycle class map.

2000 Mathematics Subject Classification: Primary 19E15 ; Secondary 19F27, 14F42.
Keywords and Phrases: Mixed motives, ℓ-adic realizations, algebraic cycles.

Introduction

Dans [19], nous avons donné une définition de la catégorie triangulée $DM_{gm}(S)$ des motifs mixtes géométriques sur un schéma noethérien séparé S et nous avons construit un foncteur triangulé quasi-tensoriel

$$R_\ell : DM_{gm}(S) \to \mathrm{D}^+(S, \mathbb{Z}_\ell)$$

de réalisation ℓ-adique à valeurs dans la catégorie des coefficients ℓ-adiques construite par T. Ekedahl dans [9]. Lorsque S est le spectre d'un corps k de caractéristique nulle plongeable dans $\mathbb{C}$, A. Huber a construit dans [16, 17] un foncteur de réalisation prenant ses valeurs dans la catégorie triangulée tensorielle $\mathrm{D}_{\mathcal{MR}}$ des réalisations mixtes de [15]

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{MR}} : DM_{gm}(k)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{D}_{\mathcal{MR}}.$$

En particulier en prenant la composante ℓ-adique de ce foncteur, elle obtient un foncteur de réalisation ℓ-adique pour les motifs mixtes géométriques sur k [1]

$$DM_{gm}(k)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(\mathrm{Spec}(k), \mathbb{Q}_\ell).$$

Nous montrons dans cet article que notre construction de [19] coïncide avec cette composante ℓ-adique. Plus précisément nous obtenons — théorème 1.1 — le résultat suivant.

THÉORÈME. *Soit k un corps de caractéristique nulle plongeable dans $\mathbb{C}$. La composante ℓ-adique du foncteur de réalisation mixte construit par A. Huber dans [16, 17] est canoniquement isomorphe au foncteur de réalisation obtenu au théorème 4.3 de [19] : il existe un isomorphisme canonique de foncteurs ϕ*

$$\begin{tikzcd}
DM_{gm}(k)^{\mathrm{op}} \arrow[r, "\mathfrak{R}_{\mathcal{MR}}"] \arrow[dr, "R_\ell"'] \arrow[dr, phantom, shift left=4ex, "\overset{\phi}{\Longrightarrow}"] & \mathrm{D}_{\mathcal{MR}} \arrow[d, "\text{Projection sur la composante } \ell\text{-adique}"] \\
 & \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(\mathrm{Spec}(k), \mathbb{Q}_\ell).
\end{tikzcd}$$

Cette comparaison est obtenue par un « dévissage » utilisant les propriétés de la transposition des morphismes finis équidimensionnels au terme duquel on se ramène essentiellement à vérifier certaines propriétés d'invariance sous Galois de la résolution de Godement.

Nous constatons par ailleurs que pour un corps parfait le foncteur de réalisation de [19] redonne au niveau cohomologique les classes de cycle ℓ-adiques construites par A. Grothendieck et U. Jannsen [1, 3, 20] pour les groupes de Chow et étendues par S. Bloch, T. Geisser et M. Levine [4, 12] pour les groupes de Chow supérieurs. Ce résultat repose sur une description naïve de l'isomorphisme dû à Voevodsky [29] entre la cohomologie motivique et les groupes de Chow supérieurs et permet de vérifier que le foncteur de réalisation de [19] est compatible aux régulateurs ℓ-adiques.

Les résultats contenus dans cet article ainsi que dans [19] proviennent de la thèse de doctorat de l'auteur [18]

CONVENTIONS

Nous reprenons les conventions générales et les notations de [19]. Ainsi

> *S désigne un schéma noethérien séparé et ℓ un nombre premier inversible sur S. Tous les schémas considérés sont supposés noethériens et séparés.*

[1] L'existence d'un tel foncteur, à coefficients entiers cette fois, découle des travaux de M. Levine sur les motifs mixtes de [23], à condition d'utiliser le théorème de comparaison [23, Chapitre VI, theorem 2.5.5] qui assure que les catégories de [23] et [27] sont équivalentes pour un corps de caractéristique nulle.

Nous notons Sch_S la catégorie des S-schémas et nous désignons par Sm_S la catégorie des S-schémas lisses de type fini. Les catégories analogues ayant cette fois pour morphismes les correspondances finies sont désignées par SchCor_S et SmCor_S.

1 Lien avec la construction de A. Huber

Nous allons comparer le foncteur de réalisation ℓ-adique que nous avons construit au théorème 4.3 de [19], avec la composante ℓ-adique du foncteur de réalisation

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{MR}} : DM_{gm}(k)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{D}_{\mathcal{MR}} \tag{1}$$

du théorème 2.3.3 de [16]. Dans ce qui précède, $\mathrm{D}_{\mathcal{MR}}$ désigne la catégorie triangulée des réalisations mixtes de [15] et k un corps de caractéristique nulle plongeable dans $\mathbb{C}$.

> *Dans cette section k désigne un corps de caractéristique nulle plongeable dans $\mathbb{C}$.*

Le résultat essentiel de cette section est le suivant.

THÉORÈME 1.1. *Le foncteur de réalisation ℓ-adique construit par A. Huber dans [16, 17] est canoniquement isomorphe au foncteur de réalisation obtenu au théorème 4.3 de [19] : il existe un isomorphisme canonique de foncteurs ϕ*

$$\begin{tikzcd}
DM_{gm}(k)^{\mathrm{op}} \arrow[r, "\mathfrak{R}_{\mathcal{MR}}"] \arrow[dr, bend right, "R_\ell"'] \arrow[dr, phantom, shift left=3, "\xRightarrow{\phi}"] & \mathrm{D}_{\mathcal{MR}} \arrow[d, "\text{projection sur la composante } \ell\text{-adique}"] \\
 & \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(\mathrm{Spec}(k), \mathbb{Q}_\ell).
\end{tikzcd}$$

Nous démontrons le théorème précédent dans la sous-section 1.3. À cet égard le résultat essentiel est la proposition 1.18, qui permet de réduire la démonstration à la vérification de certaines propriétés « d'invariance sous-Galois » de la résolution de Godement.

1.1 Transposition et préfaisceaux avec transferts

Nous débutons par des rappels sur la transposée des morphismes finis équidimensionnels dont nous aurons besoin pour démontrer la proposition 1.18.

Dans la suite, les schémas normaux seront toujours pris « au sens absolu ». Ainsi la phrase : « X est un S-schéma normal », ne signifiera pas que le morphisme structural de X vers S est normal au sens de la définition 6.8.1 de [13], mais simplement que X est un schéma de base S qui est de plus normal.

Nous aurons besoin de faire opérer un préfaisceau avec transferts F sur les transposés de morphismes finis équidimensionnels $p : X \to Y$ entre k-schémas normaux. Le schéma Y n'étant pas nécessairement régulier, le sous-schéma fermé de $X \times Y$ fini et équidimensionnel sur Y défini par le graphe de p, ne fournit pas à priori une correspondance finie entre Y et X. On ne peut donc considérer en toute généralité le morphisme

$$F(p^t) : F(X) \to F(Y) \tag{2}$$

où p^t désigne le transposé de p. Nous allons voir que les morphismes (2) ont bien un sens lorsque le préfaisceau avec transferts F prend des valeurs dans une catégorie $\mathbb{Q}$-linéaire.

Soient X, Y des S-schémas. À la place des S-correspondances finies, nous pouvons considérer le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel

$$c_S^{\mathbb{Q}}(X,Y) := \mathcal{C}_{\mathrm{equi}}(X \times_S Y/X, 0)_{\mathbb{Q}} \tag{3}$$

et définir une composition de la même manière que pour les correspondances finies via la relation

$$\beta \circ \alpha := p^{XYZ}_{XZ*} Cor(p_X^{XY\circledast}\beta, \alpha).$$

Les propriétés que nous avons données dans la sous-section 1.1 de [19] sont encore valables et le morphisme naturel

$$c_S(X,Y) \to c_S^{\mathbb{Q}}(X,Y) \tag{4}$$

est naturellement compatible à la composition.

Remarque 1.2. Lorsque X est normal, on sait par le critère de Chevalley que les morphismes équidimensionnels sont ouverts. En particulier, lorsque X est connexe, un sous-schéma fermé de $X \times_S Y$ est fini equidimensionnel sur X si et seulement si il est fini surjectif sur X.

On déduit de la proposition 3.3.14 de [25], que rationnellement on obtient rien de plus en considérant les $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels (3) qu'en considérant les correspondances finies. On a en effet le lemme suivant.

LEMME 1.3. *Soient X, Y des S-schémas. Les morphismes (4) induisent des isomorphismes*

$$c_S(X,Y)_{\mathbb{Q}} = c_S^{\mathbb{Q}}(X,Y).$$

Rappelons maintenant la définition de la transposition des morphismes finis équidimensionnels entre S-schémas.

DÉFINITION 1.4. Soit p un morphisme fini équidimensionnel de S-schémas. On appelle transposé de p, le cycle algébrique sur $Y \times_S X$

$$p^t := \varepsilon_*[\Gamma_p]$$

où $\varepsilon : X \times_S Y \to Y \times_S X$ désigne l'isomorphisme qui échange les facteurs.

Remarque 1.5. Le transposé du morphisme p étant fini equidimensionnel sur Y, on voit d'après le corollaire 3.4.3 de [25] que ce dernier appartient à $c_S^{\mathbb{Q}}(X,Y)$ dès lors que Y est normal. Naturellement, dans le cas où Y est régulier, le transposé de p est une correspondance finie.

Le lemme suivant donne les propriétés élémentaires de la transposition.

LEMME 1.6. *Soient X, Y des S-schémas normaux et $p : X \to Y$ un S-morphisme fini équidimensionnel.*

(a) Pour tout $\alpha \in c_S^{\mathbb{Q}}(X, Z)$ on a

$$\alpha \circ p^t = (p \times_S \mathrm{id}_Z)_*(\alpha)$$

(b) Pour tout S-schéma normal et tout morphisme fini équidimensionnel $q : Y \to Z$, on a

$$(q \circ p)^t = p^t \circ q^t.$$

(c) Lorsque Y est connexe, on a la formule du degré

$$p \circ p^t = \deg(p)\,\mathrm{id}_Y.$$

Démonstration. (a). Par définition de la composition, en utilisant le lemme 3.7.1 de [25], on a

$$\begin{aligned} \alpha \circ p^t &= p^{YXZ}_{YZ*} Cor\left(p_X^{YX\circledast}\alpha, p^t\right) = p^{YXZ}_{YZ*} Cor\left(p_X^{YX\circledast}\alpha, \varepsilon_*[\gamma_p]\right) \\ &= p^{YXZ}_{YZ*}(\varepsilon \times_S \mathrm{id}_Z)_* Cor\left(\varepsilon^{\circledast} p_X^{YX\circledast}\alpha, [\Gamma_p]\right) \\ &= p^{XYZ}_{YZ*} Cor\left(p_X^{XY\circledast}\alpha, [\Gamma_p]\right) \end{aligned}$$

En revenant à la définition de l'opération Cor, on voit donc que

$$\alpha \circ p^t = p^{XYZ}_{YZ*}\,(\Delta_p \times_S \mathrm{id}_Z)_*\,\Delta_p^{\circledast}\,p_X^{XY\circledast}\alpha = (p \times_S \mathrm{id}_Z)_*\alpha$$

Ce qui prouve la relation voulue.

(b). La première assertion nous donne

$$\begin{aligned} p^t \circ q^t &= (q \times_S \mathrm{id}_X)_* \varepsilon_*[\Gamma_p] = (q \times_S \mathrm{id}_X)_* \varepsilon_* \Delta_{p*}[X] = \varepsilon_* \Delta_{q \circ p *}[X] \\ &= \varepsilon_*[\Gamma_{q \circ p}] = (q \circ p)^t \end{aligned}$$

puisque le diagramme

$$\begin{tikzcd} & & X \times_S Z \arrow[dr, bend left, "\varepsilon"] & \\ X \arrow[urr, bend left, "\Delta_{q\circ p}"] \arrow[r, "\Delta_p"] & X \times_S Y \arrow[r, "\varepsilon"] & Y \times_S X \arrow[r, "q \times_S \mathrm{id}_X"] & Z \times_S X \end{tikzcd}$$

est commutatif

(c). Comme Y est normal et connexe, le morphisme p est en fait fini et surjectif. La première assertion nous assure donc que

$$p \circ p^t = (p \times_S \mathrm{id}_Y)_*[\Gamma_p] = \deg(p)[\Delta_Y] = \deg(p)\mathrm{id}_Y$$

ce que nous voulions. $\square$

On déduit immédiatement du lemme précédent, le résultat de décomposition suivant.

LEMME 1.7. *Soient X, Y des S-schémas normaux et Z un sous-schéma fermé de $X \times_S Y$ fini et équidimensionnel sur X. Alors en notant*

$$X \xleftarrow{p} Z \xrightarrow{q} Y$$

les projections naturelles, on a $[Z] = q \circ p^t$ dans $c_S^{\mathbb{Q}}(X, Y)$.

Démonstration. Notons ι l'immersion fermée de Z dans $X \times_S Y$. En remarquant que le diagramme

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\Delta_q"'] \arrow[rr, bend left, "\iota"] & Z \times_S Y \arrow[r, "p \times_S \mathrm{id}_Y"'] & X \times_S Y \end{tikzcd}$$

est commutatif, le lemme 1.6 nous donne

$$[Z] = (p \times_S \mathrm{id}_Y)_* \Delta_{q*}[Z] = (p \times_S \mathrm{id}_Y)_*[\Gamma_q] = q \circ p^t.$$

□

En particulier lorsque α est une correspondance finie appartenant à $c_S^{\mathbb{Q}}(X, Y)$ de la forme

$$\alpha = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i [Z_i]$$

les α_i étant des rationnels et les Z_i des sous-schémas fermés de $X \times_S Y$ finis et équidimensionnels sur X on a, en notant $X \xleftarrow{p_i} Z_i \xrightarrow{q_i} Y$ les projections naturelles

$$\alpha = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i (q_i \circ p_i^t)$$

dans $c_S^{\mathbb{Q}}(X, Y)$.

Remarque 1.8. Soient $\mathcal{A}$ une catégorie additive $\mathbb{Q}$-linéaire et

$$F : \mathrm{NorCor}_S^{\mathrm{op}} \to \mathcal{A}$$

un foncteur additif où NorCor_S désigne la catégorie des S-schémas normaux munis des correspondances finies. D'après ce qui précède, ce foncteur s'étend naturellement en un foncteur sur la catégorie $\mathbb{Q}$-linéaire ayant pour objets les S-schémas normaux et pour morphismes les $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels (3). En particulier pour tout morphisme fini équidimensionnel $p : X \to Y$ de S-schémas normaux, on dispose bien par fonctorialité d'un morphisme naturel

$$F(p^t) : F(X) \to F(Y).$$

Soient X, Y deux k-schémas lisses connexes. Supposons que $\alpha \in c_k(X,Y)$ soit une correspondance finie. Écrivons α sous la forme

$$\alpha = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i [Z_i]$$

où α_i est un entier relatif et Z_i un sous-schéma fermé intègre de $X \times_k Y$ fini surjectif sur X, et désignons par Z_i^N le normalisé du schéma intègre Z_i. On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & Z_i^N \arrow[d, "\text{fini surjectif}"] \arrow[ddl, bend right, "p_i^N"', "\text{fini surjectif}"] \arrow[ddr, bend left, "q_i^N"] & \\
 & Z_i \arrow[dl, "p_i"', "\text{fini surjectif}"] \arrow[dr, "q_i"] & \\
X & & Y.
\end{tikzcd} \tag{5}$$

Comme les π_i sont birationnels, les lemmes 1.6 et 1.7 nous assurent que

$$\begin{aligned}
\alpha &= \sum_{i=1}^{r} \alpha_i (q_i \circ p_i^t) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i (q \circ \pi_i \circ \pi_i^t \circ p^t) = \sum_{i=1}^{r} (q_i \circ \pi_i) \circ (p_i \circ \pi_i)^t \\
&= \sum_{i=1}^{r} \alpha_i (q_i^N \circ p_i^{Nt}).
\end{aligned} \tag{6}$$

Remarque 1.9. La description (6) du transfert ne fait pas intervenir que des schémas lisses connexes, mais utilise des schémas normaux connexes comme intermédiaire. En particulier pour un préfaisceaux avec transferts F défini seulement sur les k-schémas lisses connexes, une formule du type

$$F(\alpha) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i F(p_i^{Nt}) F(q_i^N)$$

n'a pas de sens.

La décomposition (6) est au centre de la méthode galoisienne de « rajout de transferts » donnée par A. Huber dans [16, 17] et que nous allons maintenant rappeler.

1.2 Transferts galoisiens

Dans cette sous-section nous démontrons la proposition 1.18 qui compare les transferts « galoisiens » — nous entendons par là les transferts obtenus par la méthode de A. Huber — aux « transferts d'origine » lorsqu'ils existent.

Nous faisons la convention suivante.

$\mathcal{A}$ désigne une catégorie additive $\mathbb{Q}$-linéaire pseudo-abélienne dans laquelle les petites colimites filtrantes sont représentables.

Convenons de désigner par Norc_k la catégorie des k-schémas normaux connexes de type fini et par Smc_k celle des k-schémas lisses connexes de type fini. La méthode galoisienne permet d'associer, à un $\mathcal{A}$-préfaisceau additif F sur Norc_k, un préfaisceau avec transferts F^{t} sur Smc_k muni d'un morphisme

$$\theta : F \to F^{\mathrm{t}}$$

où le premier membre désigne abusivement la restriction de F à Smc_k. Dans la suite, nous ne donnons pas les détails de la construction de F^{t}. Nous renvoyons le lecteur à *loc.cit.* pour les démonstrations. Nous aurons besoin de la remarque suivante qui précise certaines définitions et notations.

Remarque 1.10. Soit G un groupe fini. Nous dirons qu'un objet A de $\mathcal{A}$ est muni d'une action de G par automorphisme lorsque l'on s'est donné un morphisme de groupe

$$\Phi_A : G \to \mathrm{Aut}_{\mathcal{A}}(A)$$

où $\mathrm{Aut}_{\mathcal{A}}(A)$ désigne l'ensemble des automorphismes de A. Puisque $\mathcal{A}$ est $\mathbb{Q}$-linéaire, il est possible considérer le projecteur

$$\Pi_A := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \Phi_A(g)$$

pour tout objet A de $\mathcal{A}$ muni d'une action de G par automorphisme. Sachant que $\mathcal{A}$ est supposée pseudo-abélienne, le projecteur Π_A se scinde et on a une décomposition naturelle

$$A = \mathrm{Im}(\Pi_A) \oplus \mathrm{Im}(\mathrm{id}_A - \Pi_A).$$

Les invariants de A sous l'action de G sont donnés par l'image de Π_A que nous notons A^G.

Donnons nous un $\mathcal{A}$-préfaisceau sur Norc_k

$$F : \mathrm{Norc}_k^{\mathrm{op}} \to \mathcal{A}.$$

Nous notons $\mathcal{N}$ la sous-catégorie de Sch_k ayant pour objet les k-schémas normaux connexes de type fini et dont les flèches sont les morphismes finis surjectifs et génériquement galoisiens. On dispose du lemme B.3.5 de [17] :

LEMME 1.11. *Pour tout k-schéma normal connexe, la catégorie $\mathcal{N}/X$ est cofiltrante.*

Pour tout objet $(X' \xrightarrow{\pi} X)$ de $\mathcal{N}/X$, $F(X')$ est muni naturellement d'une action par automorphisme du groupe de Galois $\mathrm{Aut}(X'/X)$, ce qui permet de considérer l'objet de $\mathcal{A}$ obtenu en prenant les invariants

$$\underline{F}^{\mathrm{t}}(X' \xrightarrow{\pi} X) := F(X')^{\mathrm{Aut}(X'/X)}.$$

Pour tout morphisme

$$\begin{tikzcd} X'' \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "\pi'"'] & & X' \arrow[dl, "\pi"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

dans $\mathcal{N}/X$, la théorie de Galois nous donne un morphisme naturel $\underline{F}^{\mathrm{t}}(u)$ s'insérant dans le carré commutatif

$$\begin{tikzcd} F(X') \arrow[r, "F(u)"] & F(X'') \\ \underline{F}^{\mathrm{t}}(X' \xrightarrow{\pi} X) \arrow[u] \arrow[r, "\underline{F}^{\mathrm{t}}(u)"'] & \underline{F}^{\mathrm{t}}(X' \xrightarrow{\pi'} X). \arrow[u] \end{tikzcd}$$

On obtient ainsi un foncteur

$$\underline{F}^{\mathrm{t}} : (\mathcal{N}/X)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{A}.$$

Notation 1.12. Nous notons

$$\Pi_{X'/X} := \frac{1}{|\mathrm{Aut}(X'/X)|} \sum_{g \in \mathrm{Aut}(X'/X)} F(g) \ : \ F(X') \to F(X')$$

le projecteur canonique et $\iota_{X'/X} : \underline{F}^{\mathrm{t}}(X' \xrightarrow{\pi} X) \to F(X')$ l'inclusion naturelle. L'image réciproque prend des valeurs dans les invariants sous-Galois et l'on note $\theta_{X'/X}$ le morphisme défini par le diagramme

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, dotted, "\theta_{X'/X}"'] \arrow[rr, bend left, "\pi^*"] & \underline{F}^{\mathrm{t}}(X' \xrightarrow{\pi} X) \arrow[r, "\iota_{X'/X}"'] & F(X'). \end{tikzcd}$$

En utilisant le lemme 1.11 et notre hypothèse sur $\mathcal{A}$, on peut poser, pour tout k-schéma normal connexe de type fini X

$$F^{\mathrm{t}}(X) := \operatorname*{colim}_{(X' \xrightarrow{\pi} X) \in (\mathcal{N}/X)^{\mathrm{op}}} \underline{F}^{\mathrm{t}}(X' \xrightarrow{\pi} X).$$

On note θ_X le morphisme de $F(X)$ dans $F^{\mathrm{t}}(X)$ induit par les morphismes $\theta_{X'/X}$.

Cette construction satisfait le lemme 2.1.10 de [16].

LEMME 1.13. *La construction*

$$X \in \mathrm{Norc}_k \mapsto F^{\mathrm{t}}(X)$$

est fonctorielle contravariante par rapport aux morphismes de schémas et fonctorielle covariante par rapport aux morphismes finis surjectifs.

(a) Pour tout morphisme de schémas $p : X \to Y$, le carré

$$\begin{tikzcd} F(Y) \arrow[r, "\theta_Y"] \arrow[d, "p^*"] & F^{\mathrm{t}}(Y) \arrow[d, "p^*"] \\ F(X) \arrow[r, "\theta_X"] & F^{\mathrm{t}}(X) \end{tikzcd}$$

est commutatif.

(b) On a la formule du degré

$$\begin{tikzcd} F^{\mathrm{t}}(Y) \arrow[r, "p^*"'] \arrow[rr, bend left, "\deg(u)\mathrm{id}"] & F^{\mathrm{t}}(X) \arrow[r, "p_*"'] & F^{\mathrm{t}}(Y) \end{tikzcd} \tag{7}$$

pour tout morphisme fini surjectif $p : X \to Y$.

Remarque 1.14. Nous n'avons pas pris la même normalisation que dans [16], de manière à ce que les morphismes covariants satisfassent bien la formule du degré (7). Nous rectifions en conséquence la formule (10) donnant la définition des transferts.

Fixons un morphisme fini surjectif $p : X \to Y$ de k-schémas normaux connexes de type fini. Nous aurons besoin, dans la démonstration de la proposition 1.18, de la description explicite des morphismes d'image directe

$$p_* : F^{\mathrm{t}}(X) \to F^{\mathrm{t}}(Y) \tag{8}$$

du lemme 1.13. Étant donné un objet $(X' \xrightarrow{\pi} X) \in (\mathcal{N}/X)$, il existe un k-schéma normal connexe de type fini et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X'' \arrow[d, "q"', "\text{fini surjectif gén. galoisien}"] \arrow[ddr, bend right=60, "\pi'"', "\text{fini surjectif gén. galoisien}"'] \arrow[ddrr, bend left, "\pi''"', "\text{fini surjectif gén. galoisien}"] & & \\ X' \arrow[dr, "\pi"] & & \\ & X \arrow[r, "p"] & Y. \end{tikzcd} \tag{9}$$

On en déduit un morphisme

$$\underline{F}^{\mathrm{t}}\left(X' \xrightarrow{\pi} X\right) \xrightarrow{\underline{F}^{\mathrm{t}}(q)} \underline{F}^{\mathrm{t}}\left(X'' \xrightarrow{\pi'} X\right) \xrightarrow{\Pi_{X''/Y}} \underline{F}^{\mathrm{t}}\left(X'' \xrightarrow{\pi''} Y\right) \to F^{\mathrm{t}}(Y),$$

ces derniers étant compatibles aux morphismes de transition, on obtient le morphisme d'image directe (8) en passant à la colimite et en multipliant le morphisme obtenu par le degré de p.

Donnons nous deux k-schémas lisses connexes de type fini ainsi qu'une correspondance finie $\alpha \in c_k(X, Y)$. D'après le corollaire 3.4.6 de *loc.cit.* et la remarque 1.2, on peut décomposer α de manière unique sous la forme

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i [Z_i]$$

où les α_i sont des entiers relatifs et les Z_i des sous-schémas fermés intègres de $X \times Y$ finis et surjectifs sur X. Notons Z_i^N le normalisé du schéma intègre Z_i, qui s'insère dans le diagramme commutatif (5). Dans la démonstration du théorème 2.1.6 de [16], A. Huber définit l'action des correspondances finies sur F^{t} en posant

$$F^{\mathrm{t}}(\alpha) := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(p_{i*}^N \circ q_i^{N*} \right) \tag{10}$$

et montre que cette définition est fonctorielle et que l'action via (10) des morphismes de schémas est compatible avec celle donnée au lemme 1.13. Cela fait donc naturellement de F^{t} un foncteur

$$F^{\mathrm{t}} : (\mathrm{SmcCor}_k)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{A}.$$

où SmcCor_k désigne la catégorie des k-schémas lisses connexes de type fini munis des correspondances finies.

Remarque 1.15. Pour tout morphisme fini surjectif p, il résulte immédiatement de la définition des transferts que $p_* = F(p^t)$.

Regardons maintenant ce qui se passe lorsque l'on applique la construction galoisienne à un foncteur déjà muni initialement de transferts. Autrement dit donnons nous cette fois un foncteur

$$F : \mathrm{NorcCor}_k \to \mathcal{A}$$

où $\mathrm{NorcCor}_k$ désigne la catégorie des k-schémas normaux connexes de type fini munis des correspondances finies. Notons F^o la restriction de ce dernier à la catégorie des k-schémas normaux connexes. Pour tout k-schéma lisse connexe de type fini, on dispose du morphisme naturel

$$\theta_X : F(X) \to (F^o)^{\mathrm{t}}(X)$$

qui est compatible à l'action des morphismes de schémas sur les deux membres : les carrés

$$\begin{tikzcd} F(Y) \arrow[r, "\theta_Y"] \arrow[d, "F(p)"] & (F^o)^{\mathrm{t}}(Y) \arrow[d, "(F^o)^{\mathrm{t}}(p)"] \\ F(X) \arrow[r, "\theta_X"] & (F^o)^{\mathrm{t}}(X) \end{tikzcd} \tag{11}$$

sont commutatifs pour tout morphisme de schémas $p : X \to Y$.

Remarque 1.16. Notons $\vartheta_{X'/X}$ la composée

$$\begin{tikzcd} \underline{F}^{\mathrm{t}}(X' \xrightarrow{\pi} X) \arrow[r, "\iota_{X'/X}"] \arrow[rr, bend left, dotted, "\vartheta_{X'/X}"] & F(X') \arrow[r, "F(\pi^t)"] & F(X). \end{tikzcd}$$

En remarquant que pour tout élément du groupe de Galois $g \in \mathrm{Aut}(X'/X)$, on a $g^{-1} = g^t$, on obtient que

$$\begin{aligned} |\mathrm{Aut}(X'/X)|\big(F(\pi^t) \circ \Pi_{X'/X}\big) &= \sum_g F(\pi^t) \circ F(g) = \sum_g F(\pi^t) \circ F(g^t) \\ &= \sum_g F(g^t \circ \pi^t) = \sum_g F((\pi \circ g)^t) \\ &= \sum_g F(\pi^t) = |\mathrm{Aut}(X'/X)| F(\pi^t) \end{aligned}$$

les sommes étant prises sur les éléments g du groupe de Galois $\mathrm{Aut}(X'/X)$. On voit ainsi que le triangle ci-dessous est commutatif

$$\begin{tikzcd} F(X') \arrow[r, "\Pi_{X'/X}"] \arrow[dr, "F(\pi^t)"'] & \underline{F}^{\mathrm{t}}(X' \xrightarrow{\pi} X) \arrow[d, "\vartheta_{X'/X}"] \\ & F(X). \end{tikzcd}$$

DÉFINITION 1.17. Nous dirons que F est invariant par Galois, lorsque pour tout morphisme fini surjectif génériquement galoisien $\pi : X' \to X$, le morphisme

$$\theta_{X'/X} : F(X) \to (\underline{F}^o)^{\mathrm{t}}(X' \xrightarrow{\pi} X)$$

est un isomorphisme.

En particulier lorsque F est invariant par Galois, les morphismes $\theta_X : F(X) \to (F^o)^{\mathrm{t}}(X)$ sont des isomorphismes. Nous sommes maintenant en mesure de vérifier la proposition suivante.

PROPOSITION 1.18. *Soient X, Y des k-schémas lisses connexes de type fini. On suppose F invariant par Galois. Pour toute correspondance finie $\alpha \in c_k(X,Y)$, le carré suivant est commutatif*

$$\begin{tikzcd} F(Y) \arrow[r, "\theta_Y"] \arrow[d, "F(\alpha)"] & (F^o)^{\mathrm{t}}(Y) \arrow[d, "(F^o)^{\mathrm{t}}(\alpha)"] \\ F(X) \arrow[r, "\theta_X"] & (F^o)^{\mathrm{t}}(X). \end{tikzcd}$$

Démonstration. Compte tenu du lemme 1.7 et de la commutativité des carrés (11), il nous suffit de montrer que le carré

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "\theta_X"] \arrow[d, "F(p^t)"] & (F^o)^{\mathrm{t}}(X) \arrow[d, "(F^o)^{\mathrm{t}}(p^t)"] \\
F(Y) \arrow[r, "\theta_Y"] & (F^o)^{\mathrm{t}}(Y)
\end{tikzcd}$$

est commutatif pour tout morphisme fini surjectif $p : X \to Y$. D'après la remarque 1.15, le morphisme $(F^o)^{\mathrm{t}}(p^t)$ est donné par l'image directe p_* du lemme 1.13.

Fixons un objet $(X' \xrightarrow{\pi} X) \in (\mathcal{N}/X)$ ainsi qu'un schéma normal connexe X'' s'insérant dans un diagramme commutatif de la forme (9). Compte tenu du diagramme

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "\theta_{X'/X}"] \arrow[dr, "\theta_X"'] \arrow[dd, "F(p^t)/\deg(p)"'] & (\underline{F}^o)^{\mathrm{t}}(X' \xrightarrow{\pi} X) \arrow[r, "(\underline{F}^o)^{\mathrm{t}}(q)"] \arrow[d] & (\underline{F}^o)^{\mathrm{t}}(X'' \xrightarrow{\pi'} X) \arrow[d, "\Pi_{X''/Y}"] \\
 & (F^o)^{\mathrm{t}}(X) \arrow[d, "p_*/\deg(p)"] & (\underline{F}^o)^{\mathrm{t}}(X'' \xrightarrow{\pi''} Y) \arrow[dl] \\
F(Y) \arrow[r, "\theta_Y"] \arrow[urr, bend right, "\theta_{X''/Y}"'] & (F^o)^{\mathrm{t}}(Y), &
\end{tikzcd}$$

il nous suffit de prouver que

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "\theta_{X'/X}"'] \arrow[rr, bend left, "\pi^*"] \arrow[dd, "F(p^t)/\deg(p)"'] & (\underline{F}^o)^{\mathrm{t}}(X' \xrightarrow{\pi} X) \arrow[r] \arrow[d, "(\underline{F}^o)^{\mathrm{t}}(q)"] & F(X') \arrow[d, "q^*"] \\
 & (\underline{F}^o)^{\mathrm{t}}(X'' \xrightarrow{\pi'} X) \arrow[r] \arrow[d] & F(X'') \arrow[dl, "\Pi_{X''/Y}"] \\
F(Y) \arrow[r, "\theta_{X''/Y}"] \arrow[urr, bend right, "\pi''^*"'] & (\underline{F}^o)^{\mathrm{t}}(X'' \xrightarrow{\pi''} Y) &
\end{tikzcd} \tag{12}$$

est commutatif. En utilisant la remarque 1.16 et la fonctorialité, on sait que le diagramme suivant est commutatif

$$
\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[d, "F(p^t)"'] & & & F(X') \arrow[lll, "F(\pi^t)"'] \\
F(Y) & \underline{F}^{\mathrm{t}}(X'' \xrightarrow{\pi''} Y) \arrow[l, "\vartheta_{X''/Y}"'] & & F(X''). \arrow[u, "F(q^t)"'] \arrow[ll, "\Pi_{X''/Y}"'] \arrow[lll, bend left, "F(\pi''^t)"]
\end{tikzcd}
\tag{13}
$$

Comme par hypothèse F est invariant par Galois, le morphisme $\theta_{X''/Y}$ est un isomorphisme et la formule du degré assure que son inverse est $\vartheta_{X''/Y}/\deg(\pi'')$. On déduit ainsi de (13) que

$$\deg(\pi'')\left(\theta^{-1}_{X''/Y}\circ\Pi_{X''/Y}\right)=F(p^t)\circ F(\pi^t)\circ F(q^t).$$

En appliquant les formules du degré relatives aux morphismes v et π, on obtient maintenant

$$\deg(\pi'')\big(\Pi_{X''/Y}\circ q^*\circ\pi^*\big)=\deg(q)\deg(\pi)\big(\theta_{X''/Y}\circ F(p^t)\big)$$

et donc par multiplicativité du degré

$$\Pi_{X''/Y}\circ q^*\circ\pi^*=\theta_{X''/Y}\circ\big(F(p^t)/\deg(p)\big).$$

Cela prouve que (12) est bien commutatif et la proposition s'en déduit. □

1.3 Comparaison

Il nous suffit, pour démontrer le théorème 1.1, de vérifier que les foncteurs obtenus au niveau de la catégorie des motifs effectifs sont isomorphes.

Dans [16, 17], la restriction du foncteur triangulé tensoriel (1) aux motifs effectifs est obtenue comme la composée de trois foncteurs triangulés tensoriels

$$
\begin{tikzcd}
DM^{\mathrm{eff}}_{gm}(k)^{\mathrm{op}} \arrow[r] \arrow[rrr, bend left, "\mathfrak{R}_{\mathcal{MR}}"] & D\mathrm{Var}^{\mathrm{op}} \arrow[r] & D\mathrm{Sm}^{\mathrm{op}} \arrow[r, "\mathfrak{R}^{\mathrm{Sm}}_{\mathcal{MR}}"'] & \mathrm{D}_{\mathcal{MR}}.
\end{tikzcd}
$$

Pour la définition des catégories DVar et DSm nous renvoyons le lecteur aux définitions B.3.1 et B.5.1 de [17].

Notation 1.19. Nous notons Var la catégorie des k-schémas de type fini.

Considérons le foncteur

$$\underline{R}_\ell : \mathrm{SchCor}_k^{\mathrm{op}} \to \mathrm{C}^+(\mathrm{Spec}(k), \mathbb{Q}/\ell^*) \tag{14}$$

du lemme 4.5 de [19] et notons $\underline{R}_\ell^o$ sa restriction à la catégorie des k-schémas de type fini. Pour $\mathcal{C} = \mathrm{Var}, \mathrm{Sm}$, cette dernière induit un foncteur additif $\mathbb{Q}$-linéaire

$$\underline{R}_\ell^{\mathcal{C}} : \mathbb{Q}[\mathcal{C}]^{\mathrm{op}} \to \mathrm{C}^+(\mathrm{Spec}(k), \mathbb{Q}/\ell^*)$$

et donc aussi un foncteur

$$\mathrm{C}^{\mathrm{b}}(\mathbb{Q}[\mathcal{C}])^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathrm{C}^{\mathrm{b}}(\underline{R}_\ell^{\mathcal{C}})} \mathrm{C}^{\mathrm{b}}\left[\mathrm{C}^+(\mathrm{Spec}(k), \mathbb{Q}/\ell^*)\right] \xrightarrow{\mathrm{Tot}} \mathrm{C}^+(\mathrm{Spec}(k), \mathbb{Q}/\ell^*).$$

En passant à la catégorie homotopique, on obtient un foncteur triangulé

$$R_\ell^{\mathcal{C}} : \mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathbb{Q}[\mathcal{C}])^{\mathrm{op}} \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(\mathrm{Spec}(k), \mathbb{Q}_\ell). \tag{15}$$

Les propriétés de la cohomologie ℓ-adique assurent que le foncteur $R_\ell^{\mathcal{C}}$ se factorise par la catégorie $\mathrm{D}\mathcal{C}$.

Nous allons maintenant montrer l'existence d'isomorphismes de foncteurs ϕ_1, ϕ_2 et ϕ_3 :

$$\begin{tikzcd}
DM_{gm}^{\mathrm{eff}}(k)^{\mathrm{op}} \arrow[r] \arrow[rrr, bend left, "\mathfrak{R}_{\mathcal{MR}}"] \arrow[rrrd, bend right, "R_\ell"'] & D\mathrm{Var}^{\mathrm{op}} \arrow[r] \arrow[rrd, bend right, "R_\ell^{\mathrm{Var}}"] \arrow[d, phantom, "\overset{\phi_1}{\Longrightarrow}"] & D\mathrm{Sm}^{\mathrm{op}} \arrow[r, "\mathfrak{R}_{\mathcal{MR}}^{\mathrm{Sm}}"'] \arrow[rd, "R_\ell^{\mathrm{Sm}}"] \arrow[d, phantom, "\overset{\phi_2}{\Longrightarrow}"] & \mathrm{D}_{\mathcal{MR}} \arrow[d, "\text{Projection sur la composante } \ell\text{-adique}"] \arrow[ld, phantom, "\overset{\phi_3}{\Longrightarrow}"] \\
 & {} & {} & \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(\mathrm{Spec}(k), \mathbb{Q}_\ell)
\end{tikzcd}$$

ce qui prouvera le théorème 1.1.

L'existence de l'isomorphisme ϕ_2 découle, par construction [17, §B.4,§B.5], des propriétés de descente cohomologique propre de la cohomologie étale [2, exposé Vbis].

Pour ce qui concerne la résolution de Godement, nous reprenons les notations et les définitions de la sous-section 2.4 de [19].

Remarque 1.20. On notera que les conventions de la sous-section 2.4 de [19] concernant la résolutions de Godement pour la topologie étale coïncident avec celles de [15, §5.1].

LEMME 1.21. *Il existe un isomorphisme de foncteurs*

$$\begin{tikzcd}
D\mathrm{Sm}^{\mathrm{op}} \arrow[r, "\mathfrak{R}_{\mathcal{MR}}^{\mathrm{Sm}}"] \arrow[rd, bend right, "R_\ell^{\mathrm{Sm}}"'] & \mathrm{D}_{\mathcal{MR}} \arrow[d, "\textit{Projection sur la composante } \ell\textit{-adique}"] \arrow[ld, phantom, "\overset{\phi_3}{\Longrightarrow}"] \\
 & \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(\mathrm{Spec}(k), \mathbb{Q}_\ell)
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Dans cette démonstration, nous reprenons certaines notations de [15]. Ainsi $\tilde{\mathcal{V}}_0$ désigne la catégorie des compactifications lisses [15, defn 1.1.4] et $\tilde{\mathcal{V}}_0^\Delta$ la catégorie des objets cosimpliciaux associée. Rappelons qu'une compactification lisse (U, X) est la donnée d'un k-schéma lisse propre X et d'une immersion ouverte $j : U \hookrightarrow X$ dont le complémentaire est un diviseur à croisement normal.

Notons $\mathrm{C}_{\mathcal{MR}}$ la catégorie des complexes de réalisations mixtes [16, defn 2.2.2]. Le foncteur $\mathfrak{R}^{\mathrm{Sm}}_{\mathcal{MR}}$ est construit à partir du foncteur [15, §11.2]

$$\underline{\mathfrak{R}}^{\mathrm{Sm}}_{\mathcal{MR}} : \mathrm{Sm}_k^{\mathrm{op}} \to \mathrm{C}_{\mathcal{MR}} \tag{16}$$

de la manière suivante. Le foncteur (16) induit un foncteur $\mathbb{Q}$-linéaire additif

$$\mathrm{C}^{\mathrm{b}}(\mathbb{Q}[\mathrm{Sm}])^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathrm{C}^{\mathrm{b}}(\underline{\mathfrak{R}}^{\mathrm{Sm}}_{\mathcal{MR}})} \mathrm{C}^{\mathrm{b}}\left[\mathrm{C}_{\mathcal{MR}}\right] \xrightarrow{\mathrm{Tot}} \mathrm{C}_{\mathcal{MR}},$$

qui en passant à la catégorie homotopique, donne un foncteur triangulé

$$\mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathbb{Q}[\mathrm{Sm}])^{\mathrm{op}} \to \mathrm{D}_{\mathcal{MR}} \tag{17}$$

qui se factorise par $D\mathrm{Sm}$ en le foncteur $\mathfrak{R}^{\mathrm{Sm}}_{\mathcal{MR}}$.

Notons $\underline{\mathfrak{R}}^{\mathrm{Sm}}_\ell$ la composante ℓ-adique [15, §9.2,§9.3] du foncteur (16). Étant donnée une compatification lisse (U, X), on peut poser

$$\tilde{\underline{\mathfrak{R}}}^{\mathrm{Sm}}_\ell(U, X) = \pi_{X*} G^{X,*}_{\mathrm{Et}} j_* G^{U,*}_{\mathrm{Et}}(\mathbb{Q}_U/\ell^*).$$

On obtient de la sorte un foncteur

$$\tilde{\underline{\mathfrak{R}}}^{\mathrm{Sm}}_\ell : \tilde{\mathcal{V}}_0^{\mathrm{op}} \to \mathrm{C}^+(\mathrm{Spec}(k), \mathbb{Q}/\ell^*)$$

que l'on prolonge naturellement aux objets cosimpliciaux. Finalement le foncteur $\underline{\mathfrak{R}}^{\mathrm{Sm}}_\ell$ est donné pour tout k-schéma lisse de type fini X par

$$\underline{\mathfrak{R}}^{\mathrm{Sm}}_\ell(X) := \operatorname*{colim}_{(U,\overline{X}) \in \tilde{\mathcal{V}}_0^\Delta(X)} \tilde{\underline{\mathfrak{R}}}^{\mathrm{Sm}}_\ell(U, \overline{X})$$

où $\tilde{\mathcal{V}}_0^\Delta(X)$ désigne la catégorie [15, defn 1.1.4] des résolutions cosimpliciales de X. Par définition pour toute compactification lisse (U, X), on a

$$\underline{R}^{\mathrm{Sm}}_\ell(U) = \pi_{U*} G^{U,*}_{\mathrm{Et}}(\mathbb{Q}_U/\ell^*)$$

ce qui donne un quasi-isomorphisme canonique

$$\underline{R}^{\mathrm{Sm}}_\ell(U) \xrightarrow{\mathrm{qis}} \tilde{\underline{\mathfrak{R}}}^{\mathrm{Sm}}_\ell(U, X).$$

On obtient ainsi, en utilisant la descente cohomologique propre, un quasi-isomorphisme canonique

$$\underline{R}^{\mathrm{Sm}}_\ell(X) \xrightarrow{\mathrm{qis}} \operatorname*{colim}_{(U,\overline{X}) \in \tilde{\mathcal{V}}_0^\Delta(X)} \underline{R}^{\mathrm{Sm}}_\ell(U) \xrightarrow{\mathrm{qis}} \operatorname*{colim}_{(U,\overline{X}) \in \tilde{\mathcal{V}}_0^\Delta(X)} \tilde{\underline{\mathfrak{R}}}^{\mathrm{Sm}}_\ell(U, \overline{X}) = \underline{\mathfrak{R}}^{\mathrm{Sm}}_\ell(X)$$

pour tout k-schéma lisse de type fini X. On voit ainsi que le foncteur (15) pour $\mathcal{C} = \mathrm{Sm}$ et la composante ℓ-adique de (17) sont isomorphes, ce qui prouve le lemme. □

La démonstration du théorème 1.1 se réduit donc à montrer l'existence d'un isomorphisme de foncteur ϕ_1 :

$$\begin{tikzcd} DM_{gm}^{\mathrm{eff}}(k)^{\mathrm{op}} \arrow[r, "(18)"] \arrow[dr, bend right, "R_\ell"'] & D\mathrm{Var}^{\mathrm{op}} \arrow[d, "R_\ell^{\mathrm{Var}}"] \\ \arrow[r, phantom, "\overset{\phi_1}{\Longrightarrow}"] & \mathrm{D}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{b}}(\mathrm{Spec}(k), \mathbb{Q}_\ell). \end{tikzcd}$$

On peut décrire la composée de (18) et R_ℓ^{Var} de la manière suivante. En appliquant la construction galoisienne au foncteur $\underline{R}_\ell^o$, on obtient un foncteur

$$(\underline{R}_\ell^o)^{\mathrm{t}} : \mathrm{SmcCor}_k^{\mathrm{op}} \to \mathrm{C}^+(\mathrm{Spec}(k), \mathbb{Q}/\ell^*).$$

Ce dernier induit un foncteur

$$\mathrm{C}^{\mathrm{b}}(\mathrm{SmcCor}_k)^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathrm{C}^{\mathrm{b}}((\underline{R}_\ell^o)^{\mathrm{t}})} \mathrm{C}^{\mathrm{b}}\left[\mathrm{C}^+(\mathrm{Spec}(k), \mathbb{Q}/\ell^*)\right] \xrightarrow{\mathrm{Tot}} \mathrm{C}^+(\mathrm{Spec}(k), \mathbb{Q}/\ell^*)$$

et en passant aux catégories homotopiques, on obtient un foncteur triangulé

$$\mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{SmcCor}_k)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{D}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{b}}(\mathrm{Spec}(k), \mathbb{Q}_\ell)$$

qui se factorise par $DM_{gm}^{\mathrm{eff}}(k)$ donnant ainsi la composée de (18) et R_ℓ^{Var}.

Compte tenu de la proposition 1.18, la comparaison des foncteurs de réalisations se ramène maintenant essentiellement à vérifier certaines propriétés d'invariance sous Galois de la résolution de Godement que nous donnons maintenant.

DÉFINITION 1.22. Nous dirons qu'un faisceau étale de groupes abéliens F est de type Galois, lorsque pour tout morphisme fini surjectif génériquement galoisien $\pi : X' \to X$, le morphisme canonique

$$F_X \to (\pi_* F_{X'})^{\mathrm{Aut}(X'/X)}$$

est un isomorphisme.

LEMME 1.23. *Soit F un faisceau étale de type Galois. Alors le faisceau étale $\mathcal{G}_{\mathrm{Et}}(F)$ est de type Galois. En particulier la monade $\mathcal{G}_{\mathrm{Et}}$ induit une monade sur la sous-catégorie pleine de* $\mathrm{Sh}_{\mathrm{Et}}(\mathrm{Spec}(k))$ *formé des faisceaux de type Galois.*

Démonstration. Fixons un morphisme fini surjectif et génériquement galoisien $\pi : X' \to X$ ainsi qu'un X-schéma étale U. Notons $U' = X' \times_X U$ le schéma obtenu par changement de base. Comme F est supposé de type Galois, on voit que les sections sur U du faisceau

$$\left(\pi_* \mathcal{G}_{\mathrm{Et}}(F)_{X'}\right)^{\mathrm{Aut}(X'/X)}$$

sont données par

$$\begin{aligned}
(\pi_* \mathcal{G}_{\mathrm{Et}}(F)_{X'})^{\mathrm{Aut}(X'/X)}(U) &= \mathcal{G}_{\mathrm{Et}} F(U')^{\mathrm{Aut}(X'/X)} \\
&= \Big(\prod_{\substack{\overline{x}' \text{ bon point} \\ \text{géométrique de } U'}} F_{\overline{x}'} \Big)^{\mathrm{Aut}(X'/X)} \\
&= \prod_{\substack{\overline{y} \text{ bon point} \\ \text{géométrique de } U}} \Big(\prod_{\substack{\overline{x}' \text{ bon point} \\ \text{géométrique de } U' \\ \text{se projetant sur } \overline{y}}} F_{\overline{x}'} \Big)^{\mathrm{Aut}(X'/X)} \\
&= \prod_{\substack{\overline{y} \text{ bon point} \\ \text{géométrique de } U}} F_{\overline{y}} = \mathcal{G}_{\mathrm{Et}} F(U).
\end{aligned}$$

On voit ainsi que le morphisme

$$(\mathcal{G}_{\mathrm{Et}} F)_X \to (\pi_* (\mathcal{G}_{\mathrm{Et}} F)_{X'})^{\mathrm{Aut}(X'/X)}$$

est un isomorphisme de préfaisceaux et donc un isomorphisme de petits faisceaux étales sur X, ce qui justifie notre assertion. □

Remarque 1.24. Le lemme 1.23 assure que la résolution de Godement d'un faisceau étale de type Galois, est aussi de type Galois.

Nous pouvons maintenant prouver le lemme suivant.

LEMME 1.25. *Il existe un isomorphisme de foncteur* ϕ_1 *:*

$$\begin{tikzcd}
DM_{gm}^{\mathrm{eff}}(k)^{\mathrm{op}} \arrow[r, "(18)"] \arrow[dr, "R_\ell"'] \arrow[r, phantom, shift right=6ex, "\overset{\phi_1}{\Longrightarrow}"] & D\mathrm{Var}^{\mathrm{op}} \arrow[d, "R_\ell^{\mathrm{Var}}"] \\
 & \mathrm{D}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{b}}(\mathrm{Spec}(k), \mathbb{Q}_\ell).
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Le faisceau $\mathbb{Q}/\ell^*$ étant de type Galois, il résulte du lemme 1.23 que le complexe $G^*_{\mathrm{Et}}[\mathbb{Q}/\ell^*]$ est aussi de type Galois. Cela entraîne que le foncteur $\underline{R_\ell}$ est invariant par Galois au sens de la définition 1.17. La proposition 1.18 nous assure alors que pour tout k-schéma lisse connexe de type fini X, Y

et tout correspondance finie $\alpha \in c_k(X,Y)$, le carré

$$\begin{tikzcd} \underline{R}_\ell(Y) \arrow[r, "\theta_Y"] \arrow[d, "\underline{R}_\ell(\alpha)"'] & (\underline{R}_\ell^o)^{\mathrm{t}}(Y) \arrow[d, "(\underline{R}_\ell^o)^{\mathrm{t}}(\alpha)"] \\ \underline{R}_\ell(X) \arrow[r, "\theta_X"] & (\underline{R}_\ell^o)^{\mathrm{t}}(X) \end{tikzcd}$$

est commutatif. Cela prouve donc que les foncteurs $\underline{R}_\ell$ et $(\underline{R}_\ell^o)^{\mathrm{t}}$ sont isomorphes via la transformation naturelle θ donnée par les θ_X. Le reste du lemme s'en déduit. $\square$

2 Un morphisme classe de cycle motivique naïf

Dans toute cette section notre hypothèse est la suivante.

k désigne un corps parfait.

2.1 Préliminaires

Dans [29] V. Voevodsky construit pour tout k-schéma lisse X des isomorphismes entre la cohomologie motivique et les groupes de Chow supérieurs de Bloch

$$\mathfrak{cl}_X^{p,q} : \mathrm{CH}^p(X,q) \xrightarrow{\sim} H^{2p-q}(X,\mathbb{Z}(p)). \tag{19}$$

Ces derniers possèdent les propriétés suivantes.

LEMME 2.1. *(a) Soit $g : X \to Y$ un morphisme de k-schémas lisses de type fini. Le carré ci-dessous est commutatif*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{CH}^p(Y,q) \arrow[r, "\mathfrak{cl}_Y^{p,q}"] \arrow[d, "g^*"] & H^{2p-q}(Y,\mathbb{Z}(p)) \arrow[d, "g^*"] \\ \mathrm{CH}^p(X,q) \arrow[r, "\mathfrak{cl}_X^{p,q}"] & H^{2p-q}(X,\mathbb{Z}(p)). \end{tikzcd}$$

(b) Soient X, Y des k-schémas lisses de type fini. Le carré ci-dessous est commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{CH}^p(X,q)\otimes \mathrm{CH}^r(Y,s) \arrow[r, "\mathfrak{cl}_X^{p,q}\otimes \mathfrak{cl}_Y^{r,s}"] \arrow[d, "\times"] & H^{2p-q}(X,\mathbb{Z}(p))\otimes H^{2r-s}(Y,\mathbb{Z}(r)) \arrow[d, "\times"] \\ \mathrm{CH}^{p+r}(X\times Y,q+s) \arrow[r, "\mathfrak{cl}_{X\times Y}^{p+r,q+s}"] & H^{2p+2r-q-s}(X\times Y,\mathbb{Z}(p+r)). \end{tikzcd}$$

Le lemme 2.1 entraîne finalement la compatibilité des isomorphismes de (19) au produit d'intersection des cycles et au cup-produit.

Corollaire 2.2. *Soit X un k-schéma lisse de type fini. Les carrés*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{CH}^p(X,q)\otimes\mathrm{CH}^r(X,s) \arrow[r, "\mathfrak{cl}_X^{p,q}\otimes\mathfrak{cl}_X^{r,s}"] \arrow[d, "\frown"] & H^{2p-q}(X,\mathbb{Z}(p))\otimes H^{2r-s}(X,\mathbb{Z}(r)) \arrow[d, "\smile"] \\ \mathrm{CH}^{p+r}(X,q+s) \arrow[r, "\mathfrak{cl}_X^{p+r,q+s}"] & H^{2p+2r-q-s}(X,\mathbb{Z}(p+r)) \end{tikzcd}$$

sont commutatifs.

Les isomorphismes $CH^n(X) = H^{2n}(X,\mathbb{Z}(n))$ donnés précédemment permettent de définir les classes de Chern motiviques d'un fibré vectoriel E via les classes de Chern de [14]. Pour fixer notre convention de signe dans la définition de ces dernières, nous prenons pour relation de définition des classes de Chern supérieures en fonction de la première classe de Chern la formule

$$\sum_{q=0}^{n}(-1)^q\left(c_q(E)\circ\pi_{\mathbb{P}(E)*}\right)\smile c_1(\lambda_E)^{n-q}=0 \qquad c_0(E):=1$$

dans laquelle λ_E désigne le fibré en droites canonique sur $\mathbb{P}(E)$.

Définition 2.3. Soient X un k-schéma lisse de type fini et E un fibré vectoriel de rang fini. Pour tout entier naturel n, le morphisme de $DM_{gm}(k)$

$$\mathfrak{c}_n(E): M(X)\to\mathbb{Z}(n)[2n]$$

image de $c_n(E)\in\mathrm{CH}^n(X)$ par le morphisme $\mathfrak{cl}_X^n$ est appelé la n-ème classe de Chern motivique de E.

Définition 2.4. Soient X un k-schéma lisse de type fini et E un fibré vectoriel de rang n sur X. Pour un entier q, on note $\mathfrak{l}_q(E)$ le morphisme

$$\mathfrak{l}_q(E)=\mathfrak{c}_1(\lambda_E)^q\smile\pi_{\mathbb{P}(E)/X*}: M(\mathbb{P}(E))\to M(X)(q)[2q]$$

dans lequel λ_E désigne le fibré en droites canonique sur $\mathbb{P}(E)$.

D'après [28], le morphisme

$$\mathfrak{l}(E)=\sum_{q=0}^{n-1}\mathfrak{l}_q(E): M(\mathbb{P}(E))\to\bigoplus_{q=0}^{n-1}M(X)(q)[2q]$$

est un isomorphisme. Nous notons $D_Z(X)$ l'espace de déformation donné par l'éclatement de Z dans $\mathbb{A}^1_X$, Z étant identifié à un sous-schéma fermé de $\mathbb{A}^1_X$ via la section nulle

$$D_Z(X):=B_Z(\mathbb{A}^1_X).$$

En remarquant que le fibré projectif normal de l'immersion de Z dans $\mathbb{A}^1_X$ n'est autre que la fermeture projective du fibré normal N_ZX, cette déformation prend place dans le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}(\overline{N_Z X}) \arrow[rr, "\rho_{X,Z}"] \arrow[d, shift left, "\pi"] & & D_Z(X) \arrow[d, "\omega_{X,Z}"] & X \arrow[l, "\varrho_{X,Z}"'] \arrow[d] \\
Z \arrow[r] \arrow[u, shift left, "s"] & X \times \{0\} \arrow[r, "s_0"] & X \times \mathbb{A}^1 & X \times \{1\} \arrow[l, "s_1"']
\end{tikzcd} \tag{20}$$

où s est la restriction Z de la section canonique s de ω sur $Z \times \mathbb{A}^1$ donnée par le morphisme

$$s : Z \times \mathbb{A}^1 = B_Z(Z \times \mathbb{A}^1) \to D_Z(X).$$

Nous utilisons parfois comme espace de déformation au cône normal l'ouvert $D^\circ_Z(X)$ de $D_Z(X)$ donné par

$$D^\circ_Z(X) := D_Z(X) \setminus B_Z(X),$$

la déformation $D^\circ_Z(X)$ s'introduisant donc dans le diagramme

$$\begin{tikzcd}
N_Z X \arrow[rr, "\rho^\circ_{X,Z}"] \arrow[d] & & D^\circ_Z(X) \arrow[d, "\omega^\circ_{X,Z}"] & X \arrow[l, "\varrho^\circ_{X,Z}"'] \arrow[d] \\
Z \arrow[r] & X \times \{0\} \arrow[r, "s_0"] & X \times \mathbb{A}^1 & X \times \{1\}. \arrow[l, "s_1"']
\end{tikzcd}$$

DÉFINITION 2.5. Soit X un k-schéma lisse.

(a) Étant donné un fibré vectoriel de rang fini sur X, on appelle motif de Thom de E le motif à support $M\mathrm{Th}(E) = M_X(E)$.

(b) Étant donné un sous-schéma fermé lisse Z de X, on appelle isomorphisme de pureté l'isomorphisme [24]

$$\mathfrak{p}_{X,Z} : M_Z(X) \xrightarrow{\varrho^\circ_{X,Z}} M_{Z\times\mathbb{A}^1}(D^\circ_Z(X)) \xrightarrow{(\rho^\circ_{X,Z})^{-1}} M\mathrm{Th}(N_Z X).$$

Nous renvoyons à [7, 6] pour la définition et les propriétés de la classe de Thom motivique

$$\mathfrak{tc}(E) : M\mathrm{Th}(E) \to \mathbb{Z}(n)[2n]$$

et de l'isomorphisme de Thom $\mathfrak{t}(E) : M\mathrm{Th}(E) \to M(X)(n)[2n]$. Dans la suite nous utilisons les propriétés suivantes des morphismes de pureté et de Thom.

LEMME 2.6. *Soit E un fibré en droites sur un k-schéma lisse de type fini X. Le carré*

$$\begin{tikzcd}
M(E) \arrow[r] \arrow[d] & M\mathrm{Th}(E) \arrow[d, "\mathfrak{tc}(E)"] \\
M(X) \arrow[r, "\mathfrak{c}_1(E)"] & \mathbb{Z}(1)[2]
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

Démonstration. Considérons l'immersion ouverte canonique

$$E \hookrightarrow \mathbb{P}(\overline{E})$$

où E est identifié au complémentaire de l'hyperplan projectif à l'infini $\mathbb{P}(E)$. Il découle de la définition des classes de Thom que l'on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
& M(E) \arrow[dl, bend right, "{(\pi_{E/X*},0)}"'] \arrow[d] \\
M(X) \oplus M(X)(1)[2] \arrow[dr, bend right, "{\mathfrak{c}_1(E)-\pi_{X*}(1)[2]}"'] & M(\mathbb{P}(\overline{E})) \arrow[l, "\mathfrak{l}(\overline{E})"'] \arrow[d, "\overline{\mathfrak{tc}}(E)"] \\
& \mathbb{Z}(1)[2]
\end{tikzcd}$$

Le lemme s'en déduit $\square$

LEMME 2.7. *Soient X un k-schéma lisse de type fini et E un fibré vectoriel de rang n sur X. Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
M\mathrm{Th}(E) \arrow[r, "\mathfrak{p}_{X,E}"] \arrow[rr, bend left, "\mathfrak{tc}(E)"] & M\mathrm{Th}(N_X E) \arrow[r, "\mathfrak{tc}(N_X E)"] & \mathbb{Z}(n)[2n]
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Dans ce cas la déformation au cône normal se réduit au schéma $D_X^\circ E = E \times \mathbb{A}^1$. En utilisant la proposition 8.3.26 de [7] on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
M\mathrm{Th}(N_X E) \arrow[r, "\rho^\circ_{E,X*}"] \arrow[dr, "\mathfrak{tc}(N_X E)"'] & M_{X\mathbb{A}^1}(E \times \mathbb{A}^1) \arrow[d, "M_\nu(\pi)\circ\mathfrak{tc}(E)"] & M\mathrm{Th}(E) \arrow[l, "\varrho^\circ_{X,E*}"'] \arrow[dl, "\mathfrak{tc}(E)"] \\
& \mathbb{Z}(n)[2n] &
\end{tikzcd}$$

où π (resp. ν) désigne la projection de $E \times \mathbb{A}^1$ (resp. $X \times \mathbb{A}^1$) sur E (resp. X). Le lemme s'en déduit. $\square$

2.2 CLASSES DE CYCLE MOTIVIQUES

Nous donnons maintenant une description de l'isomorphisme (19) en termes des morphismes de Gysin motiviques. Pour la définition de ces derniers nous renvoyons à [27] et à [8, 18] pour leur étude. Nous utilisons dans la suite fréquemment le théorème de semi-pureté de la cohomologie motivique que nous énonçons ci-dessous.

THÉORÈME (DE SEMI-PURETÉ). *Soient X un k-schéma lisse de type fini et Z un sous-schéma fermé de codimension $\geq c$ de X. On a*

$$H_Z^{2q-p}(X, \mathbb{Z}(q)) = 0$$

lorque $q = c$ et $p > 0$ ou bien que $q < c$.

Démonstration. Raisonnons par récurrence sur la codimension de Z, le cas $Z = \emptyset$ étant évident. Comme k est parfait le lieu singulier de Z est de codimension > 1 dans Z. Notons alors W la réunion de ce lieu singulier et des composantes irréductibles de Z de codimension $> c$ dans X. En considérant la suite exacte longue de cohomologie motivique associée au triangle distingué dans $DM_{gm}^{\mathrm{eff}}(k)$

$$M_{Z \setminus W}(X \setminus W) \to M_Z(X) \to M_W(X) \xrightarrow{+1},$$

notre hypothèse de récurrence permet de se ramener au cas où Z est un sous-schéma fermé lisse purement de codimension c. L'isomorphisme de Gysin associé à l'immersion fermée de Z dans X, le théorème de simplification [26] et la comparaison avec les groupes de Chow supérieurs nous donnent alors des isomorphismes

$$\begin{aligned} H_Z^{2q-p}(X, \mathbb{Z}(q)) &= \mathrm{Hom}_{DM_{gm}(k)}(M_Z(X), \mathbb{Z}(q)[2q-p]) \\ &= \mathrm{Hom}_{DM_{gm}(k)}(M(Z)(c)[2c], \mathbb{Z}(q)[2q-p]) \\ &= \mathrm{Hom}_{DM_{gm}(k)}(M(Z), \mathbb{Z}(q-c)[2(q-c)-p]) \\ &= \mathrm{CH}^{q-c}(Z, p). \end{aligned}$$

Ce qui prouve le théorème. □

Dans la preuve classique donnée ci-dessus, l'hypothèse que le schéma de base soit le spectre d'un corps parfait intervient à plusieurs endroits différents, via le théorème de simplication de V. Voeovdsky [26] mais aussi via la réduction au cas où Z est lisse. Cette hypothèse s'avère donc essentielle à plus d'un titre.

2.3 CLASSES FONDAMENTALES

Soient X un k-schéma lisse de type fini et Z un sous-schéma fermé lisse de X purement de codimension p. On définit la classe fondamentale $\mathfrak{d}_X(Z)$ de Z dans X par la composition

$$\begin{tikzcd} M_Z(X) \arrow[r, "i_{Z,X}^*"'] \arrow[rr, bend left, dotted, "\mathfrak{d}_X(Z)"] & M(Z)\{p\} \arrow[r, "\pi_{Z*}\{p\}"'] & \mathbb{Z}\{p\} \end{tikzcd}$$

où $i_{Z,X}$ désigne l'immersion fermée de Z dans X.

LEMME 2.8. *Soient X un schéma lisse et Z un sous-schéma fermé lisse de X purement de codimension p.*

(a) Si $Z_1, \cdots, Z_n$ désignent les composantes connexes de Z, le diagramme

$$\begin{tikzcd} M_Z(X) \arrow[r, equal] \arrow[rr, bend left, "\mathfrak{d}_X(Z)"] & \bigoplus_{i=1}^n M_{Z_i}(X) \arrow[r, "\sum_{i=1}^n \mathfrak{d}_X(Z_i)"'] & \mathbb{Z}\{p\} \end{tikzcd}$$

est commutatif. Autrement dit la classe fondamentale de Z est la somme des classes fondamentales de ses composantes connexes.

(b) Si Z est irréductible de point générique η_Z, on a

$$\mathfrak{d}_X(Z) = \lg \mathcal{O}_{Z,\eta_Z} \cdot \mathfrak{d}_X(Z_{\mathrm{red}}).$$

Démonstration. Le premier point est immédiat. Considérons donc le second. Remarquons dans un premier temps qu'il suffit de prouver l'égalité au voisinage du point générique. En effet si U est un ouvert de X contenant η_Z, le diagramme

$$\begin{tikzcd} M_{Z\cap U}(U) \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "\mathfrak{d}_U(Z\cap U)"] & M_Z(X) \arrow[r, "\mathfrak{d}_X(Z)"'] & \mathbb{Z}(p)[2p] \end{tikzcd}$$

est commutatif et il résulte donc de l'isomorphisme d'excision $H_Z^{2p,p}(X) = H_{Z\cap U}^{2p,p}(U)$ que l'on peut se contenter de prouver le résultat en substituant U à X et $Z \cap U$ à Z.

Nous avons supposé Z lisse, l'immersion de Z dans X est donc régulière et on peut en utilisant la réduction précédente supposer que i est la composée d'immersions régulières de codimension 1 entre sous-schéma fermés lisses de X. Ceci permet par additivité de se restreindre à prouver l'égalité dans le cas de la codimension 1. Le résultat découle alors du lemme 8.3.29 de [7]. En effet notons r la longueur de $\mathcal{O}_{Z,\eta_Z}$, quitte à localiser encore un peu au voisinage du point générique, dans le diagramme

$$\begin{tikzcd} Z_{\mathrm{red}} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, hook] & Z \arrow[d, hook] \\ & X \end{tikzcd}$$

l'immersion fermée i est un épaississement d'ordre r autrement dit en notant $\mathcal{I}$ (resp. $\mathcal{J}$) l'idéal de $\mathcal{O}_X$ définissant Z (resp. Z_{red}) on a $\mathcal{I} = \mathcal{J}^r$. On a alors

$$i^* N_Z X = \left[N_{Z_{\mathrm{red}}} X \right]^{(r)}$$

et le lemme 8.3.29 de *loc.cit.* assure que l'on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
M_{Z_{\mathrm{red}}}(X) \arrow[r] \arrow[dd, equal] \arrow[rrd, bend left, "r\cdot\mathfrak{d}_X(Z_{\mathrm{red}})"] & M\mathrm{Th}(N_{Z_{\mathrm{red}}}X) \arrow[dd] \arrow[rd, "r\cdot\mathfrak{tc}(N_{Z_{\mathrm{red}}}X)"] & \\
 & & \mathbb{Z}(1)[2] \\
M_Z(X) \arrow[r] \arrow[rru, bend right, "\mathfrak{d}_X(Z)"'] & M\mathrm{Th}(N_Z X) \arrow[ru, "\mathfrak{tc}(N_Z X)"] &
\end{tikzcd}$$

ce qui prouve le lemme. □

Supposons que Z soit un sous-schéma fermé de X purement de codimension p mais non nécessairement lisse. Puisque k est parfait, le lieu singulier de Z est de codimension > 1 dans Z et à partir de la suite exacte longue

$$\cdots \to H^{2p,p}_{Z_{\mathrm{sing}}}(X) \to H^{2p,p}_{Z}(X) \to H^{2p,p}_{Z_{\mathrm{reg}}}(X \setminus Z_{\mathrm{sing}}) \to H^{2p+1,p}_{Z_{\mathrm{sing}}}(X) \to \cdots$$

le théorème de semi-pureté assure que l'on a un isomorphisme

$$H^{2p,p}_{Z}(X) = H^{2p,p}_{Z_{\mathrm{reg}}}(X \setminus Z_{\mathrm{sing}}). \tag{21}$$

En particulier on peut définir la classe fondamentale de Z comme l'image par cet isomorphisme de la classe fondamentale du lieu lisse Z_{reg} de Z dans $X \setminus Z_{\mathrm{sing}}$.

2.4 Classes de cycle naïves

En posant pour un sous-schéma fermé intègre Z de X de codimension p

$$\mathrm{cl}^p_X([Z]) := \mathfrak{d}_X(Z)$$

on obtient par linéarité un morphisme « classe de cycle »

$$\mathrm{cl}^p_X : Z^p(X) \to H^{2p,p}(X). \tag{22}$$

Remarque 2.9. Compte tenu de cette définition et du lemme 2.7, la classe de Thom d'un fibré vectoriel E de rang n sur un schéma lisse X se réinterprète comme la classe de cycle de la section nulle de E et en particulier le morphisme de Thom peut s'écrire :

$$\mathfrak{t}(E) = \mathrm{cl}^n_E([0]_E) \smile \pi_{E/X*}$$

où $\pi_{E/X}$ est la projection canonique de E sur sa base.

LEMME 2.10. *Étant donné un morphisme plat $g : X \to Y$ de k-schémas lisses de type fini, le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} Z^p(Y) & \xrightarrow{\mathrm{cl}^p_Y} & H^{2p,p}(Y) \\ \downarrow{\scriptstyle g^*} & & \downarrow{\scriptstyle g^*} \\ Z^p(X) & \xrightarrow{\mathrm{cl}^p_X} & H^{2p,p}(X). \end{array}$$

Démonstration. Supposons que W soit un sous-schéma fermé intègre de Y de codimension p. Comme g est plat, on a $g^*[W] = [Z]$ le sous-schéma fermé Z étant l'image réciproque de W dans X. Notons $Z_1, \ldots, Z_n$ les composantes irréductibles de Z. Nous pouvons supposer que W est lisse par définition du morphisme « classe de cycle ». D'après la proposition 1.14 de [8] on a

$$\mathrm{cl}_Y([W]) \circ g_* := \mathfrak{d}_Y(W) \circ g_* = \mathfrak{d}_X(Z)$$

il suffit donc d'appliquer le lemme 2.8 pour obtenir

$$\mathfrak{d}_X(Z) = \sum_{i=1}^{n} \lg \mathcal{O}_{Z_i,\eta_{Z_i}} \mathfrak{d}_X(Z_i) = \sum_{i=1}^{n} \lg \mathcal{O}_{Z_i,\eta_{Z_i}} \mathrm{cl}_X([Z_i]) = \mathrm{cl}_X([Z])$$

où η_i désigne le point générique de Z_i. $\square$

A partir du lemme 2.6 et de l'invariance par homotopie on déduit la compatibilité fondamentale de la construction précédente :

LEMME 2.11. *Soit D un diviseur de Cartier sur un schéma lisse X. On a*

$$\mathrm{cl}^1_X([D]) = \mathfrak{c}_1(\mathcal{O}_X(D)).$$

Démonstration. Nous pouvons supposer que D est un diviseur de Cartier positif. Notons L le fibré en droites associé à $\mathcal{O}_X(D)$ et $\pi_{L/X}$ la projection canonique de L sur X. La section globale canonique s_D de $\mathcal{O}_X(D)$, nous donne une section

$$s_D : X \to L$$

du fibré L. Notons s_1 la section du fibré en droites $\pi^*_{L/X}L$ sur L obtenu par image inverse de s_D le long de $\pi_{L/X}$. D'autre part l'identité de L nous fournit une section s_0 de $\pi^*_{L/X}L$ sur L. Considérons alors le fibré en droites M sur $\mathbb{A}^1_L$, image inverse de $\pi^*_{L/X}L$ le long de la projection canonique $p : \mathbb{A}^1_L \to L$, ainsi que la section de ce dernier donnée par

$$s = tp^*s_1 + (1-t)p^*s_0$$

où t désigne le paramètre de la droite affine $\mathbb{A}^1$. On a alors en notant Z le sous-schéma fermé réduit de $L \times_k \mathbb{A}^1_k$ défini par la section s, l'égalité de cycles algébriques sur L

$$i_0^*[Z] - i_1^*[Z] = \pi^*_{L/X}[D] - [0_L]$$

donc en vertu du lemme 2.10 et de l'invariance par homotopie l'égalité des classes de cohomologie dans $H^{2,1}(L)$

$$0 = \pi^*_{L/X}\mathrm{cl}^1_X([D]) - \mathrm{cl}^1_L([0]_L)$$

Le résultat découle alors du lemme 2.6 et de la remarque 2.9. □

Nous allons maintenant déduire de l'invariance par homotopie et des propriétés élémentaires des classes de Thom la compatibilité du morphisme (22) à l'équivalence rationnelle.

LEMME 2.12. *Les morphismes « classes de cycle » (22) sont compatibles avec l'équivalence rationnelle, autrement dit ils induisent des morphismes de groupes abéliens*

$$\mathrm{cl}^p_X : \mathrm{CH}^p(X) \to H^{2p,p}(X).$$

Démonstration. D'après la proposition 1.6 de [11], un cycle algébrique α de codimension p sur X est rationellement équivalent à 0 si et seulement si il existe un cycle algébrique β de codimension p sur $X \times \mathbb{P}^1$ tel que l'on ait

$$\alpha = \beta_0 - \beta_\infty.$$

En particulier pour obtenir le lemme, il suffit de vérifier que pour un tel cycle β la classe de cohomologie

$$\mathrm{cl}_X(\beta_t) \in H^{2p,p}(X)$$

est indépendante du point rationnel $t \in \mathbb{P}^1$ choisi. Notons le cycle β sous la forme

$$\beta = \sum_{Z \in (X \times \mathbb{P}^1)^{(p)}} \beta_Z[Z]$$

Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des sous-schéma fermé intègre de codimension p dont la projection sur $\mathbb{P}^1$ est un morphisme dominant, le sous-schéma fermé Z_t de X image inverse de Z par l'immersion i_t est alors purement de codimension p dans X et le cycle β_t est alors donné par

$$\beta_t = \sum_{Z \in \mathcal{S}} \beta_Z[Z_t]$$

On peut supposer que Z est lisse. En appliquant la proposition 1.14 de [8] au diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Z_t \arrow[r, "j"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "i_t"] \\ Z \arrow[r, "i"] & X\mathbb{P}^1 \end{tikzcd}$$

on obtient compte tenu du fait que $N_{Z_t}X = j^*N_Z(X \times \mathbb{P}^1)$

$$\mathrm{cl}^p_X(\beta_t) = \mathrm{cl}^p_{X \times \mathbb{P}^1}(\beta)_t.$$

Ceci permet de se restreindre à montrer que pour toute classe de cohomologie a appartenant à $H^{2p,p}(X \times \mathbb{P}^1)$ les classes a_t ne dépendent pas de t ce qui résulte immédiatement de l'invariance par homotopie et de la connexité de $\mathbb{P}^1$. □

Remarque 2.13. La cohomologie motivique tout comme les groupes de Chow ne dépend que de la structure réduite de X autrement dit le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{CH}^p(X_{\mathrm{red}}) \arrow[r, "\mathrm{cl}^p_{X_{\mathrm{red}}}"] \arrow[d, equal] & H^{2p,p}(X_{\mathrm{red}}) \arrow[d, equal] \\
\mathrm{CH}^p(X) \arrow[r, "\mathrm{cl}^p_X"] & H^{2p,p}(X)
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

On dispose en cohomologie motivique de l'analogue du morphisme de spécialisation construit au chapitre 5 de [11]. Dans *loc.cit.* W. Fulton utilise un espace de déformation au cône normal fibré sur $\mathbb{P}^1$. Étant donné un sous-schéma fermé lisse Z purement de codimension p, on a le diagramme de déformation au cône normal

$$\begin{tikzcd}
N_Z X \arrow[rr, "\overline{\rho}^{\circ}_{X,Z}"] \arrow[d, "\pi"] & & M^{\circ}_Z(X) \arrow[d, "\omega^{\circ}_{X,Z}"] & X \times \mathbb{A}^1 \arrow[l, "\overline{\varrho}^{\circ}_{X,Z}"'] \arrow[d] \\
Z \arrow[r] & X \times \{0\} \arrow[r, "i_0"] & X \times \mathbb{P}^1 & X \times (\mathbb{P}^1 \setminus \{0\}) \arrow[l]
\end{tikzcd} \tag{23}$$

où $M^{\circ}_Z(X)$ est l'ouvert de $M_Z(X) = B_{Z\times\{0\}}(X \times \mathbb{P}^1)$ complémentaire du sous-schéma fermé $B_Z(X)$.

Lemme 2.14. *Étant donnés deux éléments a, b de $H^{2p,p}(M^{\circ}_Z(X))$ ayant même image dans $H^{2p,p}(X \times \mathbb{A}^1)$, on a l'égalité*

$$(\overline{\rho}^{\circ}_{X,Z})^* a = (\overline{\rho}^{\circ}_{X,Z})^* b$$

En particulier on dispose d'un morphisme de spécialisation naturel

$$\sigma_{X,Z} : H^{2p,p}(X) \to H^{2p,p}(N_Z X).$$

Démonstration. Le théorème de semi-pureté nous donne une suite exacte

$$H^{2p-2,p-1}(N_Z X) \xrightarrow{(\overline{\rho}^{\circ}_{X,Z})_*} H^{2p,p}(M^{\circ}_Z(X)) \xrightarrow{(\overline{\varrho}^{\circ}_{X,Z})^*} H^{2p,p}(X \times \mathbb{A}^1) \to 0$$

et il suffit donc de voir que $(\overline{\rho}^{\circ}_{X,Z})^* \circ (\overline{\rho}^{\circ}_{X,Z})_* = 0$ ce qui résulte du lemme 2.6 compte tenu le fibré normal de l'immersion de $N_Z X$ dans $M^{\circ}_Z(X)$ est trivial □

La construction des morphismes « classes de cycle » est compatible aux morphismes de Gysin « ordinaires » construits dans [11].

LEMME 2.15. *Étant donnée une immersion fermée régulière $i : Z \hookrightarrow X$ de codimension pure, le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{CH}^p(X) \arrow[r, "\mathrm{cl}^p_X"] \arrow[d, "i^*"] & H^{2p,p}(X) \arrow[d, "i^*"] \\ \mathrm{CH}^p(Z) \arrow[r, "\mathrm{cl}^p_Z"] & H^{2p,p}(Z). \end{tikzcd}$$

Démonstration. La démonstration suit les étapes de la construction des morphismes de Gysin « ordinaires ». Donnons nous dans un premier temps un diviseur de Cartier D lisse sur X et considérons l'immersion fermée $i : |D| \hookrightarrow X$ du support de D dans X. Il s'agit de montrer que

$$\mathrm{cl}^p_X(\alpha) \circ i_* = \mathrm{cl}^p_{|D|}(i^*\alpha)$$

pour un cycle algébrique α sur X de codimension p. Par linéarité on peut supposer que α est de la forme $[Z]$ où Z est un sous-schéma fermé intègre de X de codimension p. Notons j l'immersion de Z dans X. Le cycle $i^*\alpha$ est alors le cycle 1-codimensionnel sur Z associé au pseudo-diviseur de Cartier

$$D' = (j^*\mathcal{O}_X(D), Z \cap |D|, j^*s_D)$$

vu comme cycle p-codimensionnel sur $|D|$. En décomposant le diviseur D en la différence de deux diviseurs de Cartier positifs on peut se ramener à supposer que D est positif et par définition de la classe de cycle que Z est lisse. Dans ce cas on dispose du diagramme commutatif d'immersions fermées régulières, horizontalement purement de codimension un et verticalement purement de codimension p

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Y}(D') \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & Z \arrow[d, hook, "j"] \\ \mathrm{Y}(D) \arrow[r, hook, "\bar{\iota}"] & X \end{tikzcd} \quad \text{avec} \quad \begin{tikzcd} \mathrm{Y}(D)_{\mathrm{red}} \arrow[r, hook, "\mathrm{can.}"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Y}(D) \arrow[r, hook, "\bar{\iota}"] & X \\ {|D|.} \arrow[urr, hook, "i"'] & & \end{tikzcd}$$

Les fibrés d'excès d'intersection sont nuls et la formule d'excès d'intersection de la proposition 1.14 de [8] assure que l'on a l'égalité

$$\begin{aligned} \mathrm{cl}^p_X(\alpha) \circ i_* &= \mathrm{cl}^p_X(\alpha) \circ \bar{\iota}_* = \mathrm{cl}^p_X([Z]) \circ \bar{\iota}_* = \mathrm{cl}_{\mathrm{Y}(D)}([\mathrm{Y}(D')]) \\ &= \mathrm{cl}^p_{|D|}(\iota^*[Z]) = \mathrm{cl}^p_{|D|}(\iota^*\alpha) \end{aligned}$$

l'avant dernière égalité résultant de la remarque 2.13.

Le cas particulier où X est un fibré vectoriel de rang p sur Z et i est la section nulle de E est quant à lui immédiat. En effet par définition le morphisme de Gysin i^* est alors l'inverse de l'image inverse π_E^* et le résultat découle alors de l'invariance par homotopie et du lemme 2.10.

Considérons maintenant le cas général. En utilisant le lemme 2.14 et la description du morphisme de spécialisation donné dans la proposition 5.2 de [11], le lemme 2.10 ainsi que le cas précédemment traité assurent que le diagramme suivant est commutatif

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{CH}^p(M^\circ_Z X) \arrow[rr, "\mathrm{cl}^p_{M^\circ_Z X}"] \arrow[dr, "(\overline{\varrho}^\circ_{X,Z})^*"] \arrow[dd, "(\overline{\rho}^\circ_{X,Z})^*"'] & & H^{2p,p}(M^\circ_Z X) \arrow[dr, "(\overline{\varrho}^\circ_{X,Z})^*"] \arrow[dd, dotted, "(\overline{\rho}^\circ_{X,Z})^*" near end] & \\
& \mathrm{CH}^p(X \times \mathbb{A}^1) \arrow[rr, "\mathrm{cl}^p_{\mathbb{A}^1_X}" near start] & & H^{2p,p}(X \times \mathbb{A}^1) \\
\mathrm{CH}^p(N_Z X) \arrow[rr, dotted, "\mathrm{cl}^p_{N_Z X}" near start] & & H^{2p,p}(N_Z X) & \\
& \mathrm{CH}^p(X) \arrow[rr, "\mathrm{cl}^p_X"] \arrow[uu, "\pi^*"' near start] \arrow[ul, squiggly, "\sigma_{Z,X}"] & & H^{2p,p}(X) \arrow[uu, "\pi^*"'] \arrow[ul, squiggly, "\sigma_{Z,X}"]
\end{tikzcd}
$$

les notations étant celle du diagramme (23). En particulier on voit que les morphismes « classes de cycle » sont compatibles aux morphismes de spécialisation. D'autre part on a le diagramme commutatif

$$
\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "s"] \arrow[drrr, bend right, "i"'] & N_Z X \arrow[r, "\overline{\rho}^\circ_{X,Z}"] & M^\circ_Z X \arrow[d, "\overline{\omega}^\circ_{X,Z}"] & X \times \mathbb{A}^1 \arrow[l, "\overline{\varrho}^\circ_{X,Z}"'] \arrow[d, "\pi"] \\
& & X \times \mathbb{P}^1 \arrow[r] & X
\end{tikzcd}
$$

où s désigne la section nulle et donc l'égalité $s^*\sigma_{Z,X} = i^*$. Il résulte de ce qui précède et de la définition du morphisme de Gysin « ordinaire » que le diagramme

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{CH}^p(X) \arrow[r, "\sigma_{Z,X}"] \arrow[rr, bend left, "i^*"] \arrow[d, "\mathrm{cl}^p_X"] & \mathrm{CH}^p(N_Z X) \arrow[r, "s^*"] \arrow[d, "\mathrm{cl}^p_{N_Z X}"] & \mathrm{CH}^p(Z) \arrow[d, "\mathrm{cl}^p_Z"] \\
H^{2p,p}(X) \arrow[r, "\sigma_{Z,X}"] \arrow[rr, bend right, "i^*"'] & H^{2p,p}(N_Z X) \arrow[r, "s^*"] & H^{2p,p}(Z)
\end{tikzcd}
$$

est commutatif, ce qui prouve la compatibilité voulue. □

LEMME 2.16. *Les morphismes « classes de cycle » sont compatibles aux pro-*

duits, autrement dit le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{CH}^p(X) \otimes \mathrm{CH}^q(Y) \arrow[r, "\mathrm{cl}^p_X \otimes \mathrm{cl}^q_Y"] \arrow[d, "\times"] & H^{2p,p}(X) \otimes H^{2q,q}(Y) \arrow[d, "\otimes"] \\
\mathrm{CH}^{p+q}(X \times Y) \arrow[r, "\mathrm{cl}^{p+q}_{XY}"] & H^{2p+2q,p+q}(X \times Y).
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Supposons que Z (resp. W) soit un sous-schéma fermé intègre de X (resp. Y) de codimension p (resp. q). On a un isomorphisme canonique

$$N_{Z \times W}(X \times Y) = N_Z X \boxplus N_W Y$$

et en particulier $\mathfrak{tc}(N_{Z \times W} X \times Y) = \mathfrak{tc}(N_Z X) \otimes \mathfrak{tc}(N_W Y)$. Par fonctorialité du morphisme de pureté cela donne l'égalité

$$\mathrm{cl}^{p+q}_{XY}([Z] \times [W]) = \mathrm{cl}^p_X([Z]) \otimes \mathrm{cl}^q_Y([W])$$

Par linéarité cela entraîne que le diagramme voulu est commutatif. □

COROLLAIRE 2.17. *Les morphismes « classes de cycle »*

$$\mathrm{cl}^p_X : \mathrm{CH}^p(X) \to H^{2p,p}(X)$$

sont des morphismes d'anneaux, autrement dit le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{CH}^p(X) \otimes \mathrm{CH}^q(X) \arrow[r, "\mathrm{cl}^p_X \otimes \mathrm{cl}^q_X"] \arrow[d, "\frown"] & H^{2p,p}(X) \otimes H^{2q,q}(X) \arrow[d, "\smile"] \\
\mathrm{CH}^{p+q}(X) \arrow[r, "\mathrm{cl}^{p+q}_X"] & H^{2p+2q,p+q}(X).
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Les lemmes 2.15 et 2.16 assure que le diagramme suivant est commuatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{CH}^p(X) \otimes \mathrm{CH}^q(X) \arrow[r, "\mathrm{cl}^p_X \otimes \mathrm{cl}^q_X"] \arrow[d, "\times"] \arrow[dd, bend right, "\frown"'] & H^{2p,p}(X) \otimes H^{2q,q}(X) \arrow[d, "\otimes"] \arrow[dd, bend left, "\smile"] \\
\mathrm{CH}^{p+q}(XX) \arrow[r, "\mathrm{cl}^{p+q}_{XX}"] \arrow[d, "\Delta^*_X"] & H^{2p+2q,p+q}(XX) \arrow[d, "\Delta^*_X"] \\
\mathrm{CH}^{p+q}(X) \arrow[r, "\mathrm{cl}^{p+q}_X"] & H^{2p+2q,p+q}(X)
\end{tikzcd}$$

ce qui assure la compatibilité aux produits d'intersection □

En utilisant la relation de définition des classes de Chern, les lemmes 2.10, 2.11 et le corollaire 2.17, on obtient

COROLLAIRE 2.18. *Soient X un schéma lisse et E un fibré vectoriel de rang n sur X. Pour $q = 0, \ldots, n$ on a*

$$\mathrm{cl}_X^n(c_q(E)) = \mathfrak{c}_q(E).$$

On dispose aussi de la compatibilité au morphisme de Gysin « raffiné »de la théorie de l'intersection construit par W. Fulton dans [11].

COROLLAIRE 2.19. *Étant donné un carré cartésien*

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "j"] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y \arrow[d, "g"] \\ Z \arrow[r, "i"] & X \end{tikzcd}$$

où i est une immersion fermée régulière de codimension pure, de fibré d'excès d'intersection $E = h^*N_ZX/N_WY$ de rang e, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{CH}^p(Y) \arrow[r, "\mathrm{cl}_Y^p"] \arrow[d, "i_g^!"'] & H^{2p,p}(Y) \arrow[d, "\mathfrak{c}_e(E)\smile j^*"] \\ \mathrm{CH}^{p+e}(W) \arrow[r, "\mathrm{cl}_W^{p+e}"] & H^{2p+2e,p+e}(W). \end{tikzcd}$$

Démonstration. Cela résulte immédiatement de la formule d'excès d'intersection en théorie de l'intersection (théorème 6.3 de [11]). En effet on a d'après le lemme 2.15 et les corollaires 2.17 et 2.18

$$\begin{aligned} \mathrm{cl}_W^{p+e}(i_g^!\alpha) &= \mathrm{cl}_W^{p+e}\big[\mathfrak{c}_e(E) \frown j^*\alpha\big] = \mathrm{cl}_W^e\big[\mathfrak{c}_e(E)\big] \smile \mathrm{cl}_W^p(j^*\alpha) \\ &= \mathfrak{c}_e(E) \smile j^*\mathrm{cl}_X^p(\alpha) \end{aligned}$$

pour tout élément $\alpha \in \mathrm{CH}^p(Y)$. □

COROLLAIRE 2.20. *Étant donné un morphisme $g : X \to Y$ de schémas lisses, le carré suivant est commutatif*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{CH}^p(Y) \arrow[r, "\mathrm{cl}_Y^p"] \arrow[d, "g^*"'] & H^{2p,p}(Y) \arrow[d, "g^*"] \\ \mathrm{CH}^p(X) \arrow[r, "\mathrm{cl}_X^p"] & H^{2p,p}(X). \end{tikzcd}$$

Démonstration. Notons i l'immersion fermée régulière du graphe de g identifié avec X dans le produit XY et π la projection de XY sur Y, on a d'après les lemmes 2.10 et 2.15

$$g^*\mathrm{cl}_Y^p(\alpha) = i^*\pi^*\mathrm{cl}_Y^p(\alpha) = \mathrm{cl}_X^p(i^*\pi^*\alpha) = \mathrm{cl}_X^p(g^*\alpha)$$

pour tout élément α de $\mathrm{CH}^p(Y)$. □

LEMME 2.21. *Si $g : X \to Y$ est un morphisme projectif purement de dimension d, le carré suivant est commutatif*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{CH}^p(X) \arrow[r, "\mathrm{cl}_X^p"] \arrow[d, "g_*"] & H^{2p,p}(X) \arrow[d, "g_*"] \\ \mathrm{CH}^{p+d}(Y) \arrow[r, "\mathrm{cl}_Y^{p+d}"] & H^{2p+2d,p+d}(Y) \end{tikzcd}$$

Démonstration. Le cas où g est une immersion fermée i d'un schéma lisse Z purement de codimension c dans un schéma lisse X est une conséquence de la fonctorialité des morphismes de Gysin du corollaire 2.5 de [8], on a en effet pour un sous-schéma fermé intègre W de codimension p dans Z

$$\begin{aligned} i_{Z,X*}\Big[\mathrm{cl}_Z^p([W])\Big] &= \Big[\pi_{Z*}\{p\} \circ i_{Z,X}^*\Big]\{c\} \circ i_{W,X}^* = \pi_{X*}\{p+c\} \circ i_{W,X}^* \\ &= \mathrm{cl}_X^{p+c}\Big[i_{Z,X*}[W]\Big]. \end{aligned}$$

Il suffit ensuite par fonctorialité d'examiner le cas où g est la projection π du fibré projectif $\mathbb{P}(E)$ sur sa base, E étant un fibré vectoriel de rang $n+1$ sur X. Dans ce cas le lemme 2.10 et les corollaires 2.17, 2.18 assurent que pour $q = 0, \ldots, n$ et un élément α de $\mathrm{CH}^{p-q}(X)$

$$\pi^* \mathrm{cl}_X^{p-q}(\alpha) \smile \mathfrak{c}_1(\lambda_E)^q = \mathrm{cl}_{\mathbb{P}(E)}^p\Big[\pi^*\alpha \frown \mathfrak{c}_1(\lambda_E)\Big]$$

autrement dit les morphismes « classes de cycle » préserve les décompositions naturelles

$$H^{2p,p}(\mathbb{P}(E)) = \bigoplus_{q=0}^{n} H^{2p-2q,p-q}(X) \qquad \mathrm{CH}^p(\mathbb{P}(E)) = \bigoplus_{q=0}^{n} \mathrm{CH}^{p-q}(X)$$

pour la dernière on se référera par exemple au théorème 3.3 de [11]. En particulier en prenant $q = n$, on a pour tout élément $\alpha \in \mathrm{CH}^p(X)$

$$\pi_* \mathrm{cl}_{\mathbb{P}(E)}^p(\alpha) = \mathrm{cl}_X^{p-n}(\pi_*\alpha).$$

□

2.5 COMPATIBILITÉ FONDAMENTALE

Nous montrons maintenant que les classes de cycle dont nous avons étudiées précédemment coïncident avec l'isomorphisme de V. Voevodsky. Nous disposons ainsi du résultat suivant.

PROPOSITION 2.22. *Soient X un k-schéma lisse et $\alpha \in \mathrm{CH}^p(X)$. On a*

$$\mathfrak{cl}_X^p(\alpha) = \mathrm{cl}_X^p(\alpha).$$

Démonstration. Il s'agit de prouver que pour tout sous-schéma fermé intègre Z de codimension p de X, on a

$$\mathfrak{cl}^p_X([Z]) = \mathrm{cl}^p_X([Z]).$$

En utilisant l'isomorphisme (21) on peut supposer que Z est lisse. Notons i l'immersion de Z dans X, il suffit alors de prouver que

$$i_* \circ \mathfrak{cl}^q_Z(\alpha) = \mathfrak{cl}^{p+q}_X(i_*\alpha)$$

pour tout élément $\alpha \in \mathrm{CH}^q(Z)$. Par soucis de simplification, on note E le fibré normal de i. En utilisant le lemme 2.1 et le corollaire 2.2, on voit que

$$\begin{aligned}
\mathfrak{cl}^p_{\mathbb{P}(\overline{E})}(s_*[Z]) \smile \pi^*\mathfrak{cl}^q_Z(\alpha) &= \mathfrak{cl}^p_{\mathbb{P}(\overline{E})}(s_*[Z]) \smile \mathfrak{cl}^q_{\mathbb{P}(\overline{E})}(\pi^*\alpha) \\
&= \mathfrak{cl}^{p+q}_{\mathbb{P}(\overline{E})}(s_*[Z] \frown \pi^*\alpha) \\
&= \mathfrak{cl}^{p+q}_{\mathbb{P}(\overline{E})}(s_*\alpha)
\end{aligned}$$

les notations étant celles du diagramme (20). On a le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}(\overline{E}) \arrow[r, "\rho_{X,Z}"] & D_Z(X) \arrow[dr, "\omega_{X,Z}"] & \\
Z \arrow[u, "s"] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\square"] & Z \times \mathbb{A}^1 \arrow[u, "s"] \arrow[r] & X \times \mathbb{A}^1
\end{tikzcd}$$

et donc en utilisant la compatibilité aux images inverses on a :

$$\begin{aligned}
\rho^*\mathfrak{cl}^{p+q}_{D_Z(X)}(s_*(\alpha \times \mathbb{A}^1)) &= \mathfrak{cl}^{p+q}_{\mathbb{P}(\overline{E})}(\rho^*_{X,Z}s_*(\alpha \times \mathbb{A}^1)) \\
&= \mathfrak{cl}^{p+q}_{\mathbb{P}(\overline{E})}(s_*\alpha)
\end{aligned}$$

De même

$$\varrho^*_{X,Z}\mathfrak{cl}^{p+q}_{D_Z(X)}(s_*(\alpha \times \mathbb{A}^1)) = \mathfrak{cl}^{p+q}_X(i_*\alpha)$$

Par définition du morphisme de Gysin il suffit donc de prouver que

$$\mathfrak{cl}^p_{\mathbb{P}(E)}(s_*[Z]) = \overline{\mathfrak{tc}}(E)$$

où ce qui revient au même que la classe de Thom du fibré normal de i est donnée en terme de classe de cycle par

$$\mathfrak{tc}(E) = \mathfrak{cl}^p_E([Z]).$$

Supposons plus généralement que E soit un fibré vectoriel de rang r sur un k-schéma lisse de type fini X. En utilisant le principe de décomposition, le lemme 2.1 ainsi que la fonctorialité des classes de Thom, on peut supposer que E est une somme directe de fibrés en droites $E_1, \ldots, E_r$ sur X. Notons q_i la projection sur le i-ème facteur. Le lemme 2.1 et le corollaire 2.2 nous donnent alors

$$\mathfrak{cl}^r_E([X]) = q_1^*\mathfrak{cl}^1_{E_1}([X]) \smile \cdots \smile q_r^*\mathfrak{cl}^1_{E_r}([X]).$$

Comme par ailleurs les propriétés des classes de Thom assurent que

$$\mathfrak{tc}(E) = q_1^*\mathfrak{tc}(E_1) \smile \cdots q_r^*\mathfrak{tc}(E_r),$$

on se trouve ramené au cas où E est un fibré en droites qui découle des lemmes 2.6 et 2.11. $\square$

3 Lien avec les classes de cycle

Nous vérifions maintenant que les morphismes induits au niveau cohomologique par le foncteur de réalisation ℓ-adique que nous avons obtenu au théorème 4.3 de [19] sont compatibles aux classes de cycle ℓ-adiques construites par A. Grothendieck et prolongées aux groupes de Chow supérieurs par S. Bloch, T. Geisser et M. Levine [4, 12] — dans [12] les classes de cycle sont à coefficients de torsion mais la construction est valable pour les coefficients ℓ-adiques [21]. Nous reprenons les hypothèses de la section 2 : ainsi

k désigne un corps parfait.

Nous traitons dans un premier temps le cas des groupes de Chow usuels. Nous nous ramènerons à ce cas pour les groupes de Chow supérieurs à l'aide d'un « argument de relativisation ». Soit X un k-schéma quasi-projectif lisse. Nous désignerons dans la suite par

$${}^{\ell}c_n(E) \in H^{2n}(X, \mathbb{Z}_\ell(n))$$

les classes de Chern ℓ-adiques d'un fibré vectoriel de rang fini sur X. De même nous désignerons par

$${}^{\ell}\mathrm{cl}^{p,q}_{X,W} : \mathrm{CH}^p_Z(X,q) \to H^{2p-q}_W(X, \mathbb{Z}_\ell(q))$$

les morphismes classes de cycle en cohomologie ℓ-adique à support dans un sous-schéma fermé W de X.

3.1 Cas des groupes de Chow

Remarquons tout d'abord que l'on dispose d'une manière canonique d'identifier la réalisation ℓ-adique du motif de Tate avec $\mathbb{Z}_\ell(-1)$. En utilisant les notations de la définition 2.4, cela se traduit plus précisément par le lemme suivant.

LEMME 3.1. *Il existe des isomorphismes canoniques* $R_\ell(\mathbb{Z}(n)) \xrightarrow{\vartheta_n} \mathbb{Z}_\ell(-n)$ *rendant commutatif, pour tout* $n \geq 0$, *le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & R_\ell(\mathbb{P}^n) & \\ \bigoplus\limits_{q=0}^{n} R_\ell(\mathbb{Z}(q))[-2q] \arrow[ur, "R_\ell(\mathfrak{l}_{\mathbb{A}^{n+1}})"] \arrow[rr, "\bigoplus\limits_{q=0}^{n} \vartheta_q[-2q]"'] & & \bigoplus\limits_{q=0}^{n} \mathbb{Z}_\ell(-q))[-2q]. \arrow[ul] \end{tikzcd} \tag{24}$$

Démonstration. On dispose des décompositions canoniques

$$\bigoplus\nolimits_{q=0}^{n} R_\ell(\mathbb{Z}(q))[-2q] \xlongequal{R_\ell(\mathfrak{l}(\mathbb{A}^{n+1}))} R_\ell(\mathbb{P}^n) \xlongequal{\qquad} \bigoplus\nolimits_{q=0}^{n} \mathbb{Z}_\ell(-q)[-2q]\ .$$

Notons ϑ_1 le morphisme indépendant de n obtenu après décalage par [2] de la composition du morphisme $R_\ell(\mathfrak{l}_1(\mathbb{A}^{n+1}))$ et de la projection sur le facteur $\mathbb{Z}_\ell(-1)[-2]$ dans l'autre décomposition. Par construction, comme on le voit pour $n = 1$, le morphisme ϑ_1 est un isomorphisme satisfaisant la relation

$${}^{\ell}c_1(\lambda_{\mathbb{A}^{n+1}}) \circ \vartheta_1[-2] = R_\ell(\mathfrak{c}_1(\lambda_{\mathbb{A}^{n+1}})$$

Le foncteur de réalisation ℓ-adique construit dans [19] étant tensoriel d'après le lemme 4.6 de *loc.cit.*, pour q quelconque, on dispose d'un morphisme naturel

$$\begin{tikzcd} R_\ell(\mathbb{Z}(q)) \arrow[r, equal] \arrow[rrr, bend left, "\vartheta_q"] & R_\ell(\mathbb{Z}(1))^{\otimes q} \arrow[r, "\vartheta_1^{\otimes q}"'] & \mathbb{Z}_\ell(-1)^{\otimes q} \arrow[r, equal] & \mathbb{Z}_\ell(-q)\ . \end{tikzcd}$$

En particulier on a

$${}^{\ell}c_1(\lambda_{\mathbb{A}^{n+1}})^q \circ \vartheta_q[-2q] = R_\ell(\mathfrak{c}_1(\lambda_{\mathbb{A}^{n+1}})^q) = R_\ell(\mathfrak{l}_q(\mathbb{A}^{n+1})).$$

ce qui signifie que les morphismes ϑ_q rendent le diagramme (24) commutatif. Par récurrence on voit alors que les ϑ_q sont des isomorphismes. □

Plus généralement il résulte de la construction des isomorphismes ϑ_q que le foncteur de réalisation ℓ-adique est compatible aux décompositions des fibrés projectifs. On dispose en effet du résultat suivant.

LEMME 3.2. *Soient* X *un* k*-schéma quasi-projectif lisse et* E *un fibré vectoriel de rang* $n+1$ *sur* X. *Le triangle ci-dessous est commutatif*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & R_\ell(\mathbb{P}(E)) & \\ \bigoplus\limits_{q=0}^{n} R_\ell(M(X)(q))[-2q] \arrow[ur, "R_\ell(\mathfrak{l}_E)"] \arrow[rr, "\bigoplus\limits_{q=0}^{n} \vartheta_q[-2q]"'] & & \bigoplus\limits_{q=0}^{n} R_\ell(X)(-q))[-2q]. \arrow[ul, "\substack{\text{décomposition donnée} \\ \text{par les classes de Chern } \ell\text{-adiques}}"'] \end{tikzcd} \tag{25}$$

Soit X un k-schéma lisse de type fini. En utilisant les isomorphismes ϑ_q, le foncteur de réalisation ℓ-adique du théorème 4.3 de [19] nous fournit des morphismes canoniques

$$\mathfrak{r}_X^{p,q} : H^p(X, \mathbb{Z}(q)) \to H^p(X, \mathbb{Z}_\ell(q))$$

pour tout entier relatif p, q. Ces derniers sont par construction compatibles à la fonctorialité et au cup-produit dont sont munies la cohomologie motivique et la cohomologie ℓ-adique. Plus généralement si W est un sous-schéma fermé de X, on dispose d'un morphisme canonique au niveau des groupes de cohomologie à support

$$\mathfrak{r}_{X,W}^{p,q} : H_W^p(X, \mathbb{Z}(q)) \to H_W^p(X, \mathbb{Z}_\ell(q)).$$

Compte tenu de la construction usuelle des classes de Chern et de Thom le lemme 3.2 admet pour corollaire immédiat le résultat suivant dans lequel ${}^\ell\mathrm{tc}(E)$ désigne la classe de Thom ℓ-adique d'un fibré vectoriel E.

COROLLAIRE 3.3. *Soient E un fibré vectoriel de rang fini sur un k-schéma quasi-projectif lisse X et $n \geq 0$ un entier. On a*

$${}^\ell c_n(E) = \mathfrak{r}_X^{2n,n}(\mathfrak{c}_n(E)) \qquad {}^\ell\mathrm{tc}(E) = \mathfrak{r}_{E,X}^{2n,n}(\mathfrak{tc}(E)).$$

Il nous suffit maintenant d'appliquer la proposition 2.22 pour obtenir la comparaison recherchée dans le cas des groupes de Chow classiques.

COROLLAIRE 3.4. *Soient X un k-schéma quasi-projectif lisse et W un sous schéma fermé de X. Le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{CH}_W^n(X) \arrow[r, "\mathfrak{cl}_{X,W}^n"] \arrow[dr, "{}^\ell\mathrm{cl}_{X,W}^n"'] & H_W^{2n}(X, \mathbb{Z}(n)) \arrow[d, "\mathfrak{r}_{X,W}^{2n,n}"] \\
& H_W^{2n}(X, \mathbb{Z}_\ell(n))
\end{tikzcd}$$

est commutatif

Démonstration. Le corollaire résulte du 3.3 et de la proposition 2.22 en remarquant que les classes de cycle ℓ-adiques sont données par la construction naïve que nous avons donné dans la sous-section 2.2 — menée cette fois dans le cadre ℓ-adique. Il s'agit d'un résultat classique que l'on peut vérifier par exemple par une démonstration analogue à celle de la proposition 2.22. $\square$

3.2 CAS DES GROUPES DE CHOW SUPÉRIEURS

Nous généralisons maintenant la comparaison précédente aux groupes de Chow supérieurs de Bloch. Soient X un k-schéma quasi-projectif lisse, W un sous-schéma fermé de X et $D_1, \ldots, D_n$ des sous-schémas fermés de X formant un diviseur à croisement normal D de X. Nous renvoyons au paragraphe 2.6 de [23, chapitre I] pour la construction du « motif relatif » à support

$$M_W(X; D) = M_W(X; D_1, \ldots, D_n).$$

Dans *loc.cit.* la construction est effectuée pour les motifs mixtes de Levine mais cette dernière se transpose sans problèmes aux motifs de Voevodsky. Par construction on dispose d'un triangle distingué

$$M(U;D_1^U,\dots,D_n^U)\to M(X;D_1,\dots,D_n)\to M_W(X;D_1,\dots,D_n)\xrightarrow{+1}$$

dans lequel $U=X\setminus W$ et $D_i^U=D_i\cap U$. On dispose en outre du triangle distingué de « relativisation » donné par

$$M(D_r;D_{1,n},\dots,D_{n-1,n})\to M(X;D_1,\dots,D_{n-1})\to M(X;D_1,\dots,D_n)\xrightarrow{+1} \tag{26}$$

avec la convention $D_{i,n}=D_i\cap D_n$. Pour un sous-ensemble $I\subset\{1,\dots,n\}$, nous notons $D_I=\cap_{i\in I}D_i$. La cohomologie motivique relative à support se définie par

$$H_W^p(X;D,\mathbb{Z}(q))=\mathrm{Hom}_{DM_{gm}(k)}(M_W(X;D_1,\dots,D_n),\mathbb{Z}(q)[p])$$

et nous disposons d'un analogue ℓ-adique que l'on note $H_W^p(X;D,\mathbb{Z}_\ell(q))$.

Remarque 3.5. Le foncteur de réalisation du théorème 4.3 de [19] induit un morphisme au niveau des groupes de cohomologie relative à support

$$\mathfrak{r}^{p,q}_{(X;D),W}:H^p(X;D,\mathbb{Z}(q))\to H_W^p(X;D,\mathbb{Z}_\ell(q)).$$

La proposition suivante est une utilisation classique de la pureté que l'on retrouve à maintes reprises dans la littérature [5, 22, 23].

PROPOSITION 3.6. *Soient X un k-schéma quasi-projectif lisse et $D_1,\dots,D_r$ des sous-schémas fermés de X formant un diviseur à croisement normal D de X. Étant donné un sous-schéma fermé W de X purement de codimension p qui intersecte proprement les D_I, on a des suites exactes courtes*

$$0\to H_W^{2p}(X;D,\mathbb{Z}_\ell(p))\to H_W^{2p}(X,\mathbb{Z}_\ell(p))\to\bigoplus_{i=1}^n H^{2p}_{W\cap D_i}(D_i,\mathbb{Z}_\ell(p))$$

$$0\to H_W^{2p}(X;D,\mathbb{Z}(p))\to H_W^{2p}(X,\mathbb{Z}(p))\to\bigoplus_{i=1}^n H^{2p}_{W\cap D_i}(D_i,\mathbb{Z}(p))$$

$$0\to \mathrm{CH}_W^p(X,D)\to\mathrm{CH}_W^p(X)\to\bigoplus_{i=1}^n\mathrm{CH}^p_{W\cap D_i}(D_i).$$

Démonstration. Nous nous contenterons de montrer le résultat concernant la cohomologie motivique, l'analogue concernant les groupes de Chow ou la cohomologie ℓ-adique se vérifiant de la même manière. Montrons tout d'abord le résultat de semi-pureté relative suivant

$$H_W^{2p-r,p}(X;D)=0$$

dès lors que $r>0$. Lorsque $n=0$ cette annulation correspond au théorème de semi-pureté. Lorsque $n>0$ on dispose de la suite exacte longue de « relativisation » associée au triangle distingué (26)

$$\begin{array}{c}\cdots\to H^{2p-r-1,p}_{W\cap D_n}(D_n;D_{1,n},\dots,D_{n-1,n})\longrightarrow H_W^{2p-r,p}(X;D_1,\dots,D_n)\\ \downarrow\\ H_W^{2p-r,p}(X;D_1,\dots,D_{n-1})\to\cdots\end{array}$$

et l'annulation voulue se déduit de cette suite exacte longue par récurrence sur n. En particulier on a une suite exacte courte

$$0 \to H^{2p,p}_W(X;D) \to H^{2p,p}_W(X;D_1,\dots,D_{n-1}) \to H^{2p,p}_{W\cap D_n}(D_n;D_{1,n},\dots D_{n-1,n})$$

et de nouveau par récurrence sur n on obtient la suite exacte courte voulue

$$0 \to H^{2p,p}_W(X;D) \to H^{2p,p}_W(X) \to \bigoplus_{i=1}^{n} H^{2p,p}_{W\cap D_i}(D_i).$$

Ce qui prouve la proposition. □

Remarque 3.7. Il résulte des constructions de E. Friedlander, A. Suslin [10] et V. Voevodsky [29], que les isomorphismes (19) identifiant les groupes de Chow à la cohomologie motivique s'étendent à des isomorphismes

$$\mathfrak{cl}^p_{(X,D),W} : \mathrm{CH}^p_W(X;D) \xrightarrow{\sim} H^{2p}_W(W;D,\mathbb{Z}(p)).$$

Ces isomorphismes sont compatibles aux suites exactes longues de relativisation.

Nous reprenons les notations suivantes de [23, Chapitre VI]. Ainsi $\square^1$ est le sous-schéma ouvert de $\mathbb{P}^1$ complémentaire de la section unité et $\square^n$ désigne le produit de n-copie de $\square^1$. En notant $(t_1,\dots,t_n)$ les coordonnées naturelles sur $\square^n$, nous désignons par $\partial\square^n$ la collection des diviseurs

$$\partial\square^n = \{t_1 = 0, t_1 = \infty, \dots, t_n = 0, t_n = \infty\}.$$

Nous sommes maintenant en mesure de vérifier la proposition suivante :

PROPOSITION 3.8. *Soient X un k-schéma quasi-projectif lisse et p,q deux entiers relatifs. Le triangle suivant*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{CH}^p(X,q) \arrow[r, "\mathfrak{cl}^{p,q}_X"] \arrow[dr, "{}^{\ell}\mathrm{cl}^{p,q}_X"'] & H^{2p-q}(X,\mathbb{Z}(p)) \arrow[d, "\mathfrak{r}^{2p-q,p}_X"] \\ & H^{2p-q}(X,\mathbb{Z}_\ell(p)) \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Démonstration. On dispose d'isomorphismes canoniques

$$\mathrm{CH}^p(X,q) = \mathrm{CH}^p(X\square^q; X\partial\square^q) \quad H^{2p-q}(X,\mathbb{Z}(p)) = H^{2p}(X\square^q; X\partial\square^q, \mathbb{Z}(p))$$
$$H^{2p-q}(X,\mathbb{Z}_\ell(p)) = H^{2p}(X\square^q; X\partial\square^q, \mathbb{Z}_\ell(p)),$$

et il suffit donc que nous prouvions que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{CH}^p(X;D) \arrow[r, "\mathfrak{cl}^p_{(X;D)}"] \arrow[dr, "{}^{\ell}\mathrm{cl}^n_{(X;D)}"'] & H^{2n}(X;D,\mathbb{Z}(n)) \arrow[d, "\mathfrak{r}^{2p,p}_{(X;D)}"] \\ & H^{2p}(X;D,\mathbb{Z}_\ell(p)) \end{tikzcd}$$

pour tout sous-schéma fermé $D_1, \ldots, D_n$ formant un diviseur à croisement normal de X. Fixons un sous-schéma fermé W de X purement de codimension p qui intersecte proprement les D_I. En utilisant la description des groupes de Chow relatifs donnés la discussion précédent le lemme 2.5 de [22], tout se ramène à prouver que, pour un sous-schéma fermé W de X purement de codimension p et intersectant proprement les D_I, les diagrammes

$$\begin{tikzcd} \mathrm{CH}^p_W(X;D) \arrow[r, "\mathfrak{cl}^p_{(X;D),W}"] \arrow[dr, "{}^\ell\mathrm{cl}^n_{(X;D),W}"'] & H^{2n}_W(X;D,\mathbb{Z}(n)) \arrow[d, "\mathfrak{r}^{2p,p}_{(X;D),W}"] \\ & H^{2p}_W(X;D,\mathbb{Z}_\ell(p)) \end{tikzcd}$$

sont commutatifs. En utilisant les suites exactes de la proposition 3.6 ainsi que la remarque 3.7, on voit que l'on a un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{CH}^n_W(X;D) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{CH}^p_W(X) \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{i=1}^r \mathrm{CH}^n_{W\cap D_i}(D_i) \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & H^{2n}_W(X;D,\mathbb{Z}(n)) \arrow[r] \arrow[d] & H^{2n}_W(X,\mathbb{Z}(n)) \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{i=1}^r H^{2n}_{W\cap D_i}(D_i,\mathbb{Z}(n)) \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & H^{2n}_W(X;D,\mathbb{Z}_\ell(n)) \arrow[r] & H^{2n}_W(X,\mathbb{Z}_\ell(n)) \arrow[r] & \bigoplus_{i=1}^r H^{2n}_{W\cap D_i}(D_i,\mathbb{Z}_\ell(n)) \end{tikzcd}$$

Par ailleurs, la proposition 4.5 de [12] assure que les morphismes classes de cycle ℓ-adiques sont compatibles aux suites exactes longues de relativisation. On en déduit ainsi que les carrés

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{CH}^n_W(X;D) \arrow[r] \arrow[d, "{}^\ell\mathrm{cl}^n_{(X;D),W}"] & \mathrm{CH}^p_W(X) \arrow[r] \arrow[d, "{}^\ell\mathrm{cl}^n_{X,W}"] & \bigoplus_{i=1}^r \mathrm{CH}^n_{W\cap D_i}(D_i) \arrow[d, "{}^\ell\mathrm{cl}^n_{D_i,W\cap D_i}"] \\ 0 \arrow[r] & H^{2n}_W(X;D,\mathbb{Z}_\ell(n)) \arrow[r] & H^{2n}_W(X,\mathbb{Z}_\ell(n)) \arrow[r] & \bigoplus_{i=1}^r H^{2n}_{W\cap D_i}(D_i,\mathbb{Z}_\ell(n)) \end{tikzcd}$$

sont commutatifs et il suffit pour conclure d'appliquer le corollaire 3.4. $\square$

3.3 Comparaison avec les régulateurs ℓ-adiques

La comparaison avec les classes de cycle ℓ-adiques obtenue dans la sous-section précédente permet de voir que le foncteur de réalisation du théorème 4.3 de [19] est compatible avec les régulateurs ℓ-adiques définis via la description de la cohomologique motivique rationnelle en terme de K-théorie et d'opérations de Adams. Plus précisément la proposition 3.8 nous donne le résultat suivant

PROPOSITION 3.9. *Soient X un k-schéma quasi-projectif lisse et p, q deux entiers relatifs. Le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{CH}^p(X,q)_{\mathbb{Q}} \arrow[r, "\mathfrak{cl}_X^{p,q}"] \arrow[d, "\text{isomorphisme de Bloch-Levine}"'] \arrow[dr, "{}^{\ell}\mathrm{cl}_X^{p,q}"'] & H^{2p-q}(X,\mathbb{Q}(p)) \arrow[d, "\mathfrak{r}_X^{2p-q,p}"] \\
K_q(X)_{\mathbb{Q}}^{(p)} \arrow[r, "{}^{\ell}\mathrm{ch}_X^{p,q}"'] & H^{2p-q}(X,\mathbb{Q}_\ell(p))
\end{tikzcd}$$

dans lequel ${}^{\ell}\mathrm{ch}_X^{p,q}$ désigne le caractère de Chern ℓ-adique de Gillet-Soulé est commutatif.

Pour la construction de l'isomorphisme de Bloch-Levine

$$\mathrm{CH}^p(X,q)_{\mathbb{Q}} = K_q(X)_{\mathbb{Q}}^{(p)}$$

intervenant dans la proposition précédente nous renvoyons aux articles [5, 22].

REMERCIEMENTS.Je remercie Bruno Kahn et Marc Levine pour les discussions que nous avons eus au sujet des résultats contenus dans [19] et dans le présent article ainsi que Joël Riou pour les remarques dont il m'a fait part.

RÉFÉRENCES

[1] *Cohomologie étale*, Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie SGA $4\frac{1}{2}$. Lecture Notes in Mathematics, vol. 569, Springer-Verlag, Berlin, 1977

[2] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 2*, Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie SGA 4. Lecture Notes in Mathematics, vol. 270, Springer-Verlag, Berlin, 1972

[3] *Cohomologie ℓ-adique et fonctions L*, Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie SGA 5. Lecture Notes in Mathematics, vol. 589, Springer-Verlag, Berlin, 1977

[4] S. Bloch, Algebraic cycles and the Beilinson conjectures, The Lefschetz centennial conference, Part I (Mexico City 1984), Contemp. Math., vol. 58, Amer. Math. Soc, Providence, RI, 1986, p. 65-79

[5] S. Bloch, Algebraic cycles and higher K-theory, *Adv. in Math.* 61 (1986), no. 3, p. 267-304

[6] F. Déglise, Interprétation motivique de la formule d'excès d'intersection, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 338 (2004), no. 1, p. 41-46

[7] F. Déglise, Modules homotopiques avec transferts et Motifs génériques, Thèse, Université Paris VII Denis Diderot, 2002

[8] F. Déglise, Around the Gysin triangle, www.math.univ-paris13.fr/~deglise /preprint.html, January 2005

[9] T. Ekedahl, On the adic formalism, The Grothendieck Festschrift, Vol. II, Progr. Math., vol. 87, Birkäuser Boston, Boston, MA, 1990, p. 197-218

[10] E. Friedlander, A. Suslin, The spectral sequence relating algebraic K-theory to motivic cohomology, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* 35 (2002), no. 6, p. 773-875

[11] W. Fulton, Intersection theory, second éd., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge, vol. 2, Springer-Verlag, Berlin, 1998

[12] T. Geisser, M. Levine, The Bloch-Kato conjecture and a theorem of Suslin-Voevodsky, *J. Reine Angew. Math.* 530 (2001), p. 55-103

[13] A. Grothendieck, Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. II, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1965), no. 24

[14] A. Grothendieck, La théorie des classes de Chern, *Bull. Soc. Math. France* 86 (1958), p. 137-154

[15] A. Huber, Mixed motives and their realization in derived categories, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1604, Springer-Verlag, Berlin, 1995

[16] A. Huber, Realization of Voevodsky's motives, *J. Algebraic Geom.* 9 (2000), no. 4, p. 755-799

[17] A. Huber, Corrigendum to « Realization of Voevodsky's motives », *J. Algebraic Geom.* 13 (2004), no. 1, p. 195-207

[18] F. Ivorra, Réalisation ℓ-adique des motifs mixtes, Thèse de doctorat de l'Université Paris 6, 2005, www.math.jussieu.fr/~fivorra/These.pdf

[19] F. Ivorra, Réalisation ℓ-adique des motifs triangulés géométriques I, prépublication, www.math.jussieu.fr/~fivorra/RealAdiqueA.pdf, Décembre 2005

[20] U. Jannsen, Continuous étale cohomology, *Math. Ann.* 280 (1988), no. 2, p. 207-245

[21] B. Kahn, The Geisser-Levine method revisited and algebraic cycles over a finite field, *Math. Ann.* 324 (2002), no. 3, p. 581-617

[22] M. Levine, Bloch's higher Chow groups revisited, *Astérisque* (1994), no. 226, p. 235-320, K-theory (Strasbourg, 1992)

[23] M. Levine, Mixed motives, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 57, American Mathematical Society,

[24] F. Morel, V. Voevodsky, $\mathbb{A}^1$-homotopy theory of schemes, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1999), no. 90, p. 45-143

[25] A. Suslin, V. Voevodsky, Relative cycles and Chow sheaves, Cycles, transfers, and motivic homology theories, Annals of Mathematics Studies, vol. 143, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2000, p. 10-86

[26] V. Voevodsky, Cancellation theorem, www.math.uiuc.edu/K-theory/0541, January 2002

[27] V. Voevodsky, Triangulated categories of motives over a field, Cycles, transfers, and motivic homology theories, Annals of Mathematics Studies, vol. 143, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2000

[28] V. Voevodsky, Homology of schemes, *Selecta Math. (N.S.)* 2 (1996), no. 1, p. 111-153

[29] V. Voevodsky, Motivic cohomology groups are isomorphic to higher Chow groups in any characteristic, *Int. Math. Res. Not* (2002), no. 7, p. 351-355

Florian Ivorra
Insitut de mathématiques de Jussieu
Équipe Théorie des nombres
175-179 rue du Chevaleret
75013 Paris
FRANCE
fivorra@math.jussieu.fr