

Une version du théorème d'Amer et Brumer pour les zéro-cycles

J.-L. Colliot-Thélène et Marc Levine

Introduction

Soit k un corps de caractéristique différente de 2. Soient f et g deux formes *quadratiques* à coefficients dans k , en $n + 1$ variables. Soit t une variable. M. Amer [A] et A. Brumer [B] ont montré que le système de formes $f = g = 0$ a un zéro non trivial sur k si et seulement si la forme quadratique $f + tg$ sur le corps $k(t)$ a un zéro non trivial.

Dans cette note, dont une version primitive fut conçue à Boston en avril 1991, nous montrons que si l'on considère les zéro-cycles de degré 1 plutôt que les points rationnels, il existe une version de ce résultat pour un système de deux formes de degré *quelconque* (Théorème 1), et des versions pour un système quelconque de formes de même degré $d \geq 2$ (Théorèmes 2 et 3).

Notations

Une variété algébrique sur un corps k est un k -schéma séparé de type fini.

Soit K/k une extension de corps et soit X un k -schéma. On note $X_K = X \times_k K$.

Définition Soient k un corps et X une k -variété algébrique. À tout point fermé $P \in X$, de corps résiduel $k(P)$, on associe son degré $[k(P) : k] \in \mathbb{N}$. L'indice $I(X/k)$ de la k -variété X est par définition le pgcd des degrés des points fermés. De façon évidente, on a $I(X/k) = 1$ si et seulement si X possède un zéro-cycle (cycle de dimension zéro) $\sum_P n_P P$ (avec $n_P \in \mathbb{Z}$) de degré $\sum_P n_P [k(P) : k] = 1$.

On appelle indice réduit de X/k , et on note $I_{red}(X/k)$ le produit des nombres premiers qui divisent $I(X/k)$.

De façon triviale, $I(X/k) = 1$ si et seulement si $I_{red}(X/k) = 1$.

Lemme 0 Soient k un corps et X une k -variété.

(a) Si $X = Y \cup Z$ est la réunion ensembliste de deux sous- k -variétés, alors $I(X/k) = \text{pgcd}(I(Y/k), I(Z/k))$. En particulier, l'indice de X/k est égal à l'indice de sa sous- k -variété réduite.

(b) Si $X = Y \cup Z$ est la réunion ensembliste de deux sous- k -variétés, alors $I_{red}(X/k) = \text{pgcd}(I_{red}(Y/k), I_{red}(Z/k))$.

(c) Si $K = k(t_1, \dots, t_n)$ est une extension transcendante pure de k , alors $I(X/k) = I(X_K/K)$.

Démonstration Seul le point (c) lorsque le corps k est fini requiert une explication. Il convient dans ce cas d'utiliser le lemme de déplacement des zéro-cycles.

Théorème 1 Soient k un corps, f et g deux formes de degré $d \geq 1$ en $n + 1 \geq 3$ variables, non toutes deux nulles. Soient t une variable et $K = k(t)$.

L'indice réduit de la K -hypersurface $W \subset \mathbf{P}_K^n$ définie par $f + tg = 0$ coïncide avec l'indice réduit de la k -variété $X \subset \mathbf{P}_k^n$ définie par $f = g = 0$.

En particulier, la $k(t)$ -hypersurface $f + tg = 0$ possède un zéro-cycle de degré 1 si et seulement si la k -sous-variété X de \mathbf{P}_k^n définie par $f = g = 0$ possède un zéro-cycle de degré 1.

Démonstration

Pour les k -variétés, on omet l'indice k .

Comme tout point fermé sur X/k définit un point fermé sur W/K de même degré, il est clair que l'indice $I(X/k)$ divise $I(W/K)$, et donc l'indice réduit $I_{red}(X/k)$ divise l'indice réduit $I_{red}(W/K)$.

Supposons d'abord que les formes f et g n'ont pas de facteur commun non constant.

Soit $V = \mathbf{P}^n \setminus X$. Notons $I = I(X/k)$. On a l'égalité $CH_0(V) = \mathbb{Z}/I$.

Soit $Z \subset \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^n$ la k -variété définie par

$$\lambda f + \mu g = 0.$$

Soit $U \subset \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^n$ l'ouvert complémentaire de Z .

La projection $q : \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^n \rightarrow \mathbf{P}^n$ induit un morphisme $q : U \rightarrow V$ qui fait de U un fibré en droites affines sur V .

On en déduit un isomorphisme $q^* : \mathbb{Z}/I = CH_0(V) \simeq CH_1(U)$.

On a la suite exacte de localisation ([F], I. Prop. 1.8) :

$$CH_1(Z) \rightarrow CH_1(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^n) \rightarrow CH_1(U) \rightarrow 0.$$

Par ailleurs les poussettes associées aux projections $p : \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^n \rightarrow \mathbf{P}^1$ et $q : \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^n \rightarrow \mathbf{P}^n$ induisent un isomorphisme $(p_*, q_*) : CH_1(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^n) \simeq CH_1(\mathbf{P}^1) \oplus CH_1(\mathbf{P}^n) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Notons

$$i : CH_1(Z) \rightarrow CH_1(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^n) \simeq CH_1(\mathbf{P}^1) \oplus CH_1(\mathbf{P}^n) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

l'application composée.

Sur Z , on trouve les 1-cycles suivants.

Le corps k étant infini, on trouve un cycle $z_1 = \mathbf{P}^1 \times R$, où R est un zéro-cycle effectif de degré d^2 sur X par intersection avec un espace linéaire de codimension 2 convenable. L'image par i de z_1 est $(d^2, 0)$.

L'hypothèse que f et g n'ont pas de facteur commun assure que la k -variété $X \subset \mathbf{P}^n$ est de codimension 2. Le corps k étant infini, on peut donc trouver une k -droite $L = \mathbf{P}^1 \subset \mathbf{P}^n$ qui ne rencontre pas X . La projection $q : Z \rightarrow \mathbf{P}^n$ induit un isomorphisme $q : Z \setminus q^{-1}(X) \simeq \mathbf{P}^n \setminus X$. Soit $z_2 \subset Z$ l'image réciproque de L par cet isomorphisme. Ceci définit un 1-cycle sur $Z \subset \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^n$, dont l'image par i est $(d, 1)$. En effet, ce 1-cycle est donné par $\mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^n$, où la projection sur le second facteur est l'inclusion linéaire $l : \mathbf{P}^1 \subset \mathbf{P}^n$, et où la projection sur le premier facteur est donnée par $(-g(l), f(l))$ (on a noté ici l un système de $n+1$ formes linéaires en deux variables). Comme X ne rencontre pas l , le couple $(f(l), g(l))$ de formes homogènes de degré d n'a pas de zéro commun.

Soit $s = I(W/K)$. L'hypersurface $f + tg = 0$ sur le corps K possède un zéro-cycle de degré s . L'adhérence d'un tel zéro-cycle dans $Z \subset \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^n$ définit un 1-cycle z_3 dont l'image par i est de la forme (s, a) pour un certain entier $a \in \mathbb{Z}$.

Le quotient de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ par le groupe engendré par $(d^2, 0), (d, 1), (s, a)$ est annulé par l'entier $\text{pgcd}(d^2, s - ad)$. De la suite de localisation on conclut que, pour un certain entier $a \in \mathbb{Z}$, l'entier $I = I(X/k)$ divise $\text{pgcd}(d^2, I(W/K) - ad)$. Comme par ailleurs $I(W/K)$ divise $I(X/k)$, on conclut

$$I_{red}(X/k) = I_{red}(W/K).$$

Si le corps k est fini, on obtient le résultat par un argument de trace, en considérant deux extensions finies suffisamment grandes du corps fini et de degrés premiers entre eux.

On peut aussi utiliser le lemme 0 pour remplacer au début le corps fini k par une extension transcendante pure $k(u)$.

Supposons maintenant que $f = h.f_1$ et $g = h.g_1$ avec f_1 et g_1 homogènes de même degré sans facteur commun non constant et h homogène non constant.

Soit $X \subset \mathbf{P}_k^n$, resp. $X_1 \subset \mathbf{P}_k^n$, resp. $X_2 \subset \mathbf{P}_k^n$ la k -variété définie par $f = g = 0$, resp. par $f_1 = g_1 = 0$, resp. par $h = 0$. Soit $W \subset \mathbf{P}_K^n$, resp. W_1/K la variété définie par $f + tg = 0$, resp. $f_1 + tg_1 = 0$. On a

$$I_{red}(W/K) = \text{pgcd}(I_{red}(W_1/K), I_{red}(X_{2,K}/K)) = \text{pgcd}(I_{red}(W_1/K), I_{red}(X_2/k))$$

d'après le lemme 0 et

$$\text{pgcd}(I_{\text{red}}(W_1/K), I_{\text{red}}(X_2/k)) = \text{pgcd}(I_{\text{red}}(X_1/k), I_{\text{red}}(X_2/k)) = I_{\text{red}}(X/k),$$

la première égalité résultant de $I_{\text{red}}(W_1/K) = I_{\text{red}}(X_1/k)$ établi ci-dessus, la seconde égalité provenant du lemme 0.

Ceci achève la démonstration.

Le théorème 1 se généralise à un nombre quelconque de formes. Il y a en fait deux généralisations.

Théorème 2 Soient k un corps, f_0, f_1, \dots, f_r , avec $r \geq 1$, des formes à coefficients dans k , de degré $d \geq 1$, en $n+1 \geq r+2$ variables, formes dont l'annulation définit la k -variété $X \subset \mathbf{P}_k^n$. Soient t_1, \dots, t_r des variables indépendantes et $K = k(t_1, \dots, t_r)$. Soit $W \subset \mathbf{P}_K^n$ la K -variété définie par $f_1 - t_1 f_0 = \dots = f_r - t_r f_0 = 0$. On a :

$$I_{\text{red}}(X/k) = I_{\text{red}}(W/K).$$

En particulier, la K -variété W possède un zéro-cycle de degré 1 si et seulement si la k -variété X possède un zéro-cycle de degré 1.

Démonstration

Pour les k -variétés, on omet l'indice k .

Comme tout point fermé sur X/k définit un point fermé sur W/K de même degré, il est clair que l'indice $I(X/k)$ divise $I(W/K)$, et donc l'indice réduit $I_{\text{red}}(X/k)$ divise l'indice réduit $I_{\text{red}}(W/K)$.

Supposons d'abord que les formes f_i n'ont pas de facteur commun non constant.

On suppose d'abord le corps k infini.

Soit $V = \mathbf{P}^n \setminus X$. Soit $Z \subset \mathbf{P}^r \times \mathbf{P}^n$ la k -variété définie par la proportionalité de $(\lambda_0, \dots, \lambda_r)$ et de (f_0, \dots, f_r) , c'est-à-dire par le système d'équations $\lambda_i f_j - \lambda_j f_i = 0$ pour $i, j \in \{0, \dots, r\}$. La fibre de $Z \rightarrow \mathbf{P}^r$ au-dessus du point générique de \mathbf{P}^r est W/K .

Soit $U \subset \mathbf{P}^r \times \mathbf{P}^n$ l'ouvert complémentaire de Z . La projection $q : \mathbf{P}^r \times \mathbf{P}^n \rightarrow \mathbf{P}^n$ induit un morphisme $q : U \rightarrow V$. Le morphisme $q_Z : Z \rightarrow \mathbf{P}^n$ induit un isomorphisme $q_Z^{-1}(V) \simeq V$. Les fibres de $q : U \rightarrow V$ au-dessus d'un point M de V sont donc le complémentaire d'un point dans un espace projectif \mathbf{P}^r .

De façon plus globale, le morphisme $q : U \rightarrow V$ se décompose comme

$$U \rightarrow U_1 \rightarrow V$$

où $q_1 : U \rightarrow U_1$ est un fibré en droites affines et $q_2 : U_1 \rightarrow V$ est un fibré projectif de dimension relative $r-1$.

Par image directe par morphisme propre on a un isomorphisme $q_{2*} : CH_0(U_1) \simeq CH_0(V) = \mathbb{Z}/I$. Par image inverse par morphisme plat, on a un isomorphisme $q_1^* : CH_0(U_1) \simeq CH_1(U)$. On a donc un isomorphisme $CH_1(U) \simeq \mathbb{Z}/I$.

On a la suite exacte de localisation

$$CH_1(Z) \rightarrow CH_1(\mathbf{P}^r \times \mathbf{P}^n) \rightarrow CH_1(U) \rightarrow 0.$$

Par ailleurs les poussettes associées aux projections $p : \mathbf{P}^r \times \mathbf{P}^n \rightarrow \mathbf{P}^r$ et $q : \mathbf{P}^r \times \mathbf{P}^n \rightarrow \mathbf{P}^n$ induisent un isomorphisme $(p_*, q_*) : CH_1(\mathbf{P}^r \times \mathbf{P}^n) \simeq CH_1(\mathbf{P}^r) \oplus CH_1(\mathbf{P}^n) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Notons

$$i : CH_1(Z) \rightarrow CH_1(\mathbf{P}^r \times \mathbf{P}^n) \simeq CH_1(\mathbf{P}^r) \oplus CH_1(\mathbf{P}^n) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

l'application composée.

Sur Z , on trouve les 1-cycles suivants.

Un cycle $z_1 = \mathbf{P}^1 \times R$, où $\mathbf{P}^1 \subset \mathbf{P}^r$ est une droite et R est un zéro-cycle effectif de degré d^{r+1} sur X . Lorsque X est une intersection complète, un tel zéro-cycle est donné par l'intersection avec un espace linéaire général de dimension $n - 1 - r$. Dans le cas général le résultat est encore vrai par spécialisation à partir du cas de position générale. L'image par i de z_1 est $(d^{r+1}, 0)$.

Soit $s = I(W/K)$. Il existe donc un zéro-cycle de degré s sur W/K , et un tel zéro-cycle s'étend en un r -cycle sur Z , cycle génériquement fini sur \mathbf{P}^r de degré relatif s . Sa restriction au-dessus d'une droite générale $\mathbf{P}^1 \subset \mathbf{P}^r$ est un 1-cycle sur Z , dont l'image par i est de la forme (s, a) pour un certain entier $a \in \mathbb{Z}$.

Les formes homogènes (f_0, \dots, f_r) définissent un morphisme $\sigma : V \rightarrow \mathbf{P}^r$. Elles définissent donc une section du morphisme $q : \mathbf{P}_V^r \rightarrow V$, section dont l'image est dans Z : c'est l'isomorphisme inverse de l'isomorphisme $q_Z^{-1}(V) \simeq V$ mentionné plus haut. L'hypothèse que les f_i n'ont pas de diviseur commun non trivial assure que la k -variété $X \subset \mathbf{P}^n$ est de codimension au moins 2. Le corps k étant infini, on peut donc trouver une k -droite $L = \mathbf{P}^1 \subset \mathbf{P}^n$ qui ne rencontre pas X . La restriction de σ à L est donc un morphisme $L \rightarrow Z \subset \mathbf{P}^r \times \mathbf{P}^n$, dont l'image est un 1-cycle sur Z . L'image de ce 1-cycle par i est $(d, 1)$.

Le groupe \mathbb{Z}^2 est engendré par les trois éléments $(d^{r+1}, 0)$, (s, a) et $(d, 1)$. Le quotient par ce sous-groupe est \mathbb{Z}/J , avec $J = \text{pgcd}(d^{r+1}, s - ad)$.

De la suite de localisation on conclut que $I = I(X/k)$ divise $\text{pgcd}(d^{r+1}, I(W/K) - ad)$ pour un certain entier $a \in \mathbb{Z}$. Comme par ailleurs $I(W/K)$ divise $I(X/k)$, on conclut

$$I_{\text{red}}(X/k) = I_{\text{red}}(W/K).$$

Supposons maintenant que $f_i = h \cdot g_i$ pour tout i avec les g_i homogènes de même degré sans facteur commun non constant et h homogène non constant.

Soit $X \subset \mathbf{P}_k^n$, resp. $X_1 \subset \mathbf{P}_k^n$, resp. $X_2 \subset \mathbf{P}_k^n$ la k -variété définie par l'annulation des f_i , resp. par l'annulation des g_i , resp. par $h = 0$. Soit $W \subset \mathbf{P}_K^n$, resp. W_1/K la variété définie par l'annulation des $f_i - t_i f_0$ ($i = 1, \dots, r$), resp. par l'annulation des $g_i - t_i g_0$ ($i = 1, \dots, r$).

On a

$$I_{\text{red}}(W/K) = \text{pgcd}(I_{\text{red}}(W_1/K), I_{\text{red}}(X_{2,K}/K)) = \text{pgcd}(I_{\text{red}}(W_1/K), I_{\text{red}}(X_2/k))$$

d'après le lemme 0 et

$$\text{pgcd}(I_{\text{red}}(W_1/K), I_{\text{red}}(X_2/k)) = \text{pgcd}(I_{\text{red}}(X_1/k), I_{\text{red}}(X_2/k)) = I_{\text{red}}(X/k),$$

la première égalité résultant de $I_{\text{red}}(W_1/K) = I_{\text{red}}(X_1/k)$ établi ci-dessus, la seconde égalité provenant du lemme 0.

Le cas où k est fini se traite par un argument de trace. On peut aussi utiliser le lemme 0 pour remplacer au début le corps fini k par une extension transcendante pure $k(s)$.

Ceci achève la démonstration.

Voici la seconde généralisation du théorème 1.

Théorème 3 *Soient k un corps, f_0, f_1, \dots, f_r des formes non toutes nulles, à coefficients dans k , de degré $d \geq 1$, en $n + 1 \geq r + 2$ variables. Soit $X \subset \mathbf{P}_k^n$ la k -variété définie par l'annulation de ces formes. Soient w_1, \dots, w_r des variables indépendantes et $L = k(w_1, \dots, w_r)$. Soit $Y \subset \mathbf{P}_L^n$ l'hypersurface définie par $f_0 + w_1 f_1 + \dots + w_r f_r = 0$. On a :*

$$I_{\text{red}}(X/k) = I_{\text{red}}(Y/L).$$

En particulier, la L -hypersurface Y possède un zéro-cycle de degré 1 si et seulement si la k -variété X possède un zéro-cycle de degré 1.

Démonstration Soit E_r l'énoncé de ce théorème pour r fixé et tout corps k . L'énoncé E_1 est le théorème 1. Supposons établi E_{r-1} .

Supposons $r \geq 2$. Soient t_1, \dots, t_r des variables indépendantes et $K = k(t_1, \dots, t_r)$. D'après le théorème 2, on a $I_{red}(X/k) = I_{red}(W/K)$, où la K -variété $W \subset \mathbf{P}_K^n$ est définie par $f_1 - t_1 f_0 = \dots = f_r - t_r f_0 = 0$.

Soient s_2, \dots, s_r des variables indépendantes et $F = K(s_2, \dots, s_r)$. D'après E_{r-1} , l'indice réduit de W sur $K = k(t_1, \dots, t_r)$ est égal à l'indice réduit sur F de l'hypersurface T définie dans \mathbf{P}_F^n par

$$(f_1 - t_1 f_0) + s_2(f_2 - t_2 f_0) + \dots + s_r(f_1 - t_1 f_0) = 0.$$

Ceci se réécrit

$$f_1 - (t_1 + s_2 t_2 + \dots + s_r t_r) f_0 + s_2 f_2 + \dots + t_r f_r = 0.$$

Soient $w_1 = -1/(t_1 + s_2 t_2 + \dots + s_r t_r)$ et, pour $i \geq 2$, $w_i = -s_i/(t_1 + s_2 t_2 + \dots + s_r t_r)$. L'équation de l'hypersurface $T \subset \mathbf{P}_F^n$ s'écrit alors

$$f_0 + w_1 f_1 + \dots + w_r f_r = 0.$$

L'inclusion

$$k(w_1, \dots, w_r, t_2, \dots, t_r) \subset k(t_1, t_2, \dots, t_r, s_2, \dots, s_r) = F$$

est une égalité. L'extension $F = L(t_2, \dots, t_r)$ est transcendante pure. D'après le lemme 0, l'indice réduit sur L de l'hypersurface définie par

$$f_0 + w_1 f_1 + \dots + w_r f_r = 0$$

dans \mathbf{P}_L^n est égal à l'indice réduit de cette hypersurface sur F . Ceci achève la démonstration.

Remarque

A. Pfister, J.W.S. Cassels et D. F. Coray (voir les références dans [C]) ont donné des exemples d'intersections complètes de trois quadriques $f_0 = f_1 = f_2 = 0$ dans \mathbf{P}_k^n (sur un corps k de caractéristique différente de 2) qui possèdent un zéro-cycle de degré 1 sans posséder de point rationnel. La quadrique $f_0 + t_1 f_1 + t_2 f_2 = 0$ sur le corps $k(t_1, t_2)$ possède alors un zéro-cycle de degré 1. Comme c'est une quadrique, un théorème de Springer [S] assure que cette quadrique admet un point $k(t_1, t_2)$ -rationnel.

On voit ainsi que le théorème 3 ne vaut pas lorsque l'on remplace les zéro-cycles de degré 1 par des points rationnels : le théorème d'Amer et Brumer ne s'étend pas à un système de 3 formes.

Bibliographie

- [A] M. Amer, Quadratische Formen über Funktionenkörpern, Dissertation, Mainz 1976.
- [B] A. Brumer, Remarques sur les couples de formes quadratiques. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **286** (1978), no. 16, A679–A681.
- [C] D. F. Coray, On a problem of Pfister about intersections of three quadrics. Arch. Math. (Basel) **34** (1980), no. 5, 403–411.
- [F] W. Fulton, Intersection theory, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Band 2, Springer-Verlag 1984.
- [S] T. A. Springer, Sur les formes quadratiques d'indice zéro. C. R. Acad. Sci. Paris **234** (1952) 1517–1519.

Jean-Louis Colliot-Thélène

C.N.R.S., Mathématiques, Bâtiment 425, Université Paris-Sud, F-91405 Orsay, France
jlct@math.u-psud.fr

Marc Levine

Department of Mathematics, Northeastern University, 360 Huntington Avenue, Boston, MA
02115, USA

marc@neu.edu

and

Universität Duiburg-Essen Fakultät Mathematik, Campus Essen 45117 Essen, Germany

marc.levine@uni-due.de

Marc Levine acknowledges support by the NSF, grant number DMS-0801220, and the
Alexander von Humboldt Foundation