

EINIGE GEDANKEN UEBER DIE ROLLE DER TECHNOLOGIE IM MATHEMATIKUNTERRICHT

Peter Braunfeld

University of Illinois at Urbana-Champaign

7. Oktober, 2004

Vorbemerkungen

Guten Tag.

Erst, ein paar kurze Vorbemerkungen.

Erstens, moechte ich gleich am Anfang betonen was fuer eine ganz besondere Freude es mir ist, die Moeglichkeit zu haben, hier in Wien, die Stadt meiner Geburt und Jugend, einen Vortrag zu halten. Ein bisschen Geschichte: Kurz nach dem ersten Weltkrieg (ich glaube es war zirka 1919), erhielt mein Vater sein Dr. Juris von der Universitaet Wien. Ich, selbst, bin in Wien geboren, und habe, waehrend meiner ersten acht Lebensjahre, in der Ebendorferstrasse 4 gewohnt, was ja nur ein paar 100 Meter von der Universitaet liegt. Waehrend der Jahren 1937 – 38, habe ich die Schottenschule besucht—die ja auch ganz in der Naeheliegt—wo ich die 1. und 2. Klasse absolviert habe.

Fuer die Einladung, danke ich der mathematischen Fakultael der Universitaet Wien, und, ganz besonders, Herrn Prof. Dr. Karl Sigmund. Dazu moechte ich noch sagen, dass ich schon eine fruehere Einladung vom Herrn Prof. Dr. Sigmund erhalten hatte, in Zusammenhang mit dem Oesterreichisch/Deutschem Mathematiker Kongress der hier in Wien im September, 2001 stattfand. In Zusammenhang mit diesem Kongress, hatte Prof. Sigmund eine Ausstellung organisiert: “Kuehler Abschied von Europa—Wien 1938 und der Exodus der Mathematik.” Diese Ausstellung befasste sich, einerseits, mit der Emigration aus Oesterreich von juedischen Mathematikern, aber auch mit Kindern, wie ich, die gezwungen waren Oesterreich zu dieser Zeit zu verlassen, und die dann spaeter im Ausland Mathematik studiert, und betrieben, haben. Leider aber, musste ich damals meinen Wiener Besuch absagen, da infolge der Ereignissen des 11. Septembers, alle transatlantischen Fluege von den USA nach Europa eingestellt wurden. So habe ich den Vortrag den ich fuer diesen Kongress vorbereitet hatte, sozusagen, “aufs Eis gelegt”, und jetzt wieder mit einigen “updates” “aus dem Gefrierschrank herausheholt”.

Wie Sie ja ersehen, habe ich mich entschlossen meinen Vortrag auf deutsch zu halten, was gar nicht so leicht fuer mich ist. Meine Eltern und ich sprachen zwar zumeist, auch nach unserer Auswanderung, zu Hause deutsch. Trotzdem, ist mein deutsch heute noch immer, im Wesentlichen, das eines 8-jaehrigen Kindes. Das reicht zwar fuer Alltagsgespraecheliegt ziemlich gut aus, aber ist fuer einen Universitaetsvortrag ziemlich mangelhaft. Wenn mir also eindeutschwes Wort fehlen sollte, dann bitte ich Sie einzuspringen, und mir den richtigen Ausdruck zu sagen. Dabei, moechte ich noch eines

sagen: bei einem *englischen* Vortrag, wuerde es mir nie einfaellen ihn vorzulesen. Aber, auf deutsch, fuehle ich mich sicherer, wenn ich mich auf das geschriebene Wort, wenigstens teilweise, stuetzen kann.

Ich moecht Ihnen jetzt noch, in ein paar Worten, ueber meinen professionellen background erzaehlen. Ich habe mein Ph.D. in Mathematik an der University of Illinois in 1959 erhalten. Mein Fachgebiet war Algebra, und, insbesondere, Gruppentheorie. Dabei hatte ich die Gelegenheit zwei Jahre lang mit Prof. Dr. Rheinhold Baer zu studieren, und hatte eigentlich geplant meine Doktorarbeit unter seiner Betreuung zu schreiben. Leider kam es nicht dazu, weil Prof. Baer nach Deutschland (Universitaet Frankfurt) zurueckkehrte, und in einem Zeitalter vor e-mail und faxes, waere ein "long-distance" Zusammenarbeiten zu kompliziert gewesen. Trotz meines background in Algebra, habe ich mich kurz nach meinem Ph.D mehr fuer Didaktik der Mathematik intessiert, und das wurde dann auch die Berufslaufbahn meines Lebens. Wie kam das? Das grosse Ereigniss des Jahres 1957 war das Abschiessen in eine Weltumlaufbahn des sowietschen Satellitten, Sputnik. Dieses Ereigniss verursachte in den USA eine fast hysterische Reaktion. Erstens, war das amerikanische Publikum im tiefsten erstaunt, dass so eine technische Leistung den Russen gelungen war (und den Amerikaners, nicht.). Zweitens, befuerchteten viele Menschen, dass allzu bald die Sowiets Atombomben und derlei vom Himmel erbarmungslos auf die amerikanschen Grossstaedte loslassen wuerden. Man suchte also eine Suendenbock. Und man fand ihn auch. Die Loesung war, meiner Meinung nach, typisch Amerikanisch. Die Schuld lag klarer Weise an den *Schulen*, die eben viel zu wenig Mathematik und Wissenschaft ihren Schuelern beibrachten. Man musste also in rapider Weise den Mathematik- und Wissenschaftsunterricht in den Schulen reformieren.

Und das natuerlich benoetigte enorme Geldsummen. Die Eisenhower Regierung in Washington machte viele milliarden Dollar fuer Schulreform verfuegbar. Uebrigens, geschah etwas aehnliches, obwohl nicht ganz so dramatisches, in den 80er Jahren statt— nur waren es diesmal nich die Russen, sondern die Japaner, die uns zwar nicht militaerisch, aber doch wirtschaftlich zu den Knien bringen wuerden. Man schertzt in der didaktischen Gemeinschat oeffters darueber, dass das schlimmste was je fuer das amerikanische Schulwesen geschen ist war, erstens, der Fall der Sowietunion, und dann spaeter, der Rueckgang in der japanischen Wirtschaft. Denn es ist leider nur im Kontext von internationaler Wettbewerbung, dass sich das amerikanische Publikum sehr fuer Mathematikunterricht interessiert, und die notwendigen Gelder fuer neue Initiativen den Schulen zur Verfuegung stellt.

Und jetzt zu meinem Thema: Einige Gedanken ueber die Rolle der Technologie im Mathematikunterricht.

Technologie

Gleich am Anfang, moechte ich sagen, dass ich viele von den Ideen, die ich hier besprechen werde, und ganz besonders die *Beispiele*, meinem Kollegen und guten Freund, Paul Goldenberg, verdanke. Paul ist ein Forscher in Paedagogik am *Education*

Development Center (EDC) in Newton, Massachusetts. Wollen Sie mehr ueber diese Ideen wissen, dann empfehle ich Ihnen die EDC Home Web page zu besuchen, oder, Sie koennen auch direkt an Paul per e-mail schreiben. Ich bin ganz sicher dass es ihn freuen wuerde mit Ihnen ins Gespraech zu kommen, aber das muss natuerlich auf Englisch sein.

Und dann muss ich noch sagen, dass das Thema, Technologie im Mathematikunterricht, natuerlich viel zu breit fuer eine kurze Vorlesung ist. Ich werde mich also auf den Taschenrechner beschreanken, ein Geraet, das in unseren Schulen besonders weitverbreitet ist, und die groesste Popularitaet genieisst, und besonders auf die Taschenrechner, die graphischen Darstellungsfahigkeiten besitzen, also die sogenannten “graphing calculators”.

Der Benutz dieser Geraete hat viele Fragen mit sich gebracht, z.B.,

- Ob, wann, wie oft, und unter welchen Zustaenden soll man diese Geraete den Schuelern zur Vefuegung stellen?
- Was fuer Konsequenzen haben diese neuen “Werkzeuge” fuer den traditionellen Mathematikunterricht, insb., fuer die traditionelle Arithmetik und Algebra?

Ueber diese Fragen, gibt’s bei uns viel und, oft, sogar, bitteren, Streit. Und, interessanter Weise, an diesem Streit beteiligen sich nicht nur Mathematiker, Paedagogen und Lehrer—sondern, auch sehr eifrig, die Massenmedien, die Politiker, und auch das allgemeine Publikum. Wer haette sich vor zwanzig Jahren gedacht, dass man in der *NY Times* und im *Wall Street Journal* fast taeglich Polemiken finden wuerde ueber “esoterische” Fragen, wie, z.B., ob Schueler die quadratische Formel auswendig lernen sollen, oder nicht.

Arithmetik

Beginnen wir also mit der Frage: Wie wichtig ist es heutzutage, dass Schueler lernen die vier traditionellen Rechensarten mit Bleistift und Papier (“pencil and paper”) durchzufuehrn? Es erstaunt mich immer wieder, wie viele Leute bei uns ueber dieses Thema ganz extreme Meinungen vertreten.

Die Argumente der Reformer, laufen etwa so: Es sei doch glatter Wahnsinn dass man die Schueler jahrelang zwingt Algorithmen zu lernen und zu ueben (oft, mit minimalem Erfolg), um das zu erreichen was man mit einem \$3 Taschenrechner gleich so gut erzielen kann. Ganz besonders angegriffen und verspottet wird der Divisionsalgorithmus, worueber man immer wieder die Schlagzeile: “Long division is dead!” hoehrt.

Von der konservativen Seite, hoehrt man das genaue Gegenteil: Fertigkeit im Rechnen ist eine unbedingte Voraussetzung, nicht nur fuer allen weiteren Fortschritt im Mathematiklernen, aber auch, vor allem, im Alltagsleben. Auf dieser Seite herrscht der Gegenruf: “Back to basics!”—und man hoehrt dabei immer neue und schrecklichere Anekdoten, wie, z.B., dass die Jugendlichen bei McDonalds nicht einmal, ohne technische Hilfe, richtigen Wechsel for \$5 geben koennen.

Um die Intensitaet dieses Streites gewissermassen zu verstehen, muss man sich aber auch darueber klar werden, dass es sich hier nicht *nur* um die Mathematik dreht. Die sogenannten “math wars” bilden nur einen kleinen Teil der viel groesseren “culture wars” (Kulturkriege) die sich ja gerade jetzt wieder im Wahlkampf zwishen Bush and Kerry abspielen. Die konservativen Elemente haben, z.B., in den letzten Jahren zuschauen muessen, wie die Gesellschaft, und, insbesondere die Schulen, immer liberaler geworden sind—in Kleidung, Manierlichkeit, Musik, usw., usw. Was frueher einmal als *absolute* Werte galten (besonders, in Schulfachern, wie, z.B., amerikanischer Geschichte oder Sozialwissenschaft), ist jetzt viel mehr von *relativen* Werten die Rede. So ist das Mathematikklassenzimmer zu einem *Symbol* geworden—die letzte Stelle wo Disziplin herrschen soll, und die traditionellen Werte und Wahrheiten gelehrt, und gelernt, werden sollen.

Es gibt, natuerlich, auch genug Leute, die eine mittlere Stellung annehmen. Aber, allzu oft kann man diese Stimmen der Maessigkeit im allgemeinen Krawall kaum hoeren.

Und jetzt, folgen einige meiner eigenen Gedanken ueber all dies:

Erstens, ist es mir ganz klar, dass man, z.B., das lernen (aber, noch vielmehr, das endlose *ueben*) des Divisionsalgorithmus aus rein *praktischen* Gruenden heutzutage kaum verteidigen kann. Niemand, unternimmt es im modernen Werkplatz eine Rechnung, so wie, z.B., $(3.457.123,08) : (8.798,71)$ mit der Hand auszufuehren. Solche Rechnungen erledigtg man leicht und sicher mit einem Taschenrechner. (Und dann kommt oefters die Gegenfrage: Ja, und was tut man, wenn im Moment kein Taschenrechner bei der Hand ist? Meine persoendlich Antwort dazu ist: “In solchen Notfaellen, verschiebt man die Rechnung auf spaeter; oder, man macht vielleicht eine Kopfrechnung, um die Antwort *abzuschuetzen*.”)

Meiner Ansicht nach aber, beweist all dies noch lange nicht, dass man das Lehren des Divisionsalgorithmus in der Schule einfach abschaffen kann.

Ueberlegen wir uns, z.B., das Problem: $4:3 = ?$

Der Taschenrechner gibt uns sofort die Antwort: 1,33333333, und das ist auch, ganz gewiss, die *richtige* Antwort. Aber, das ist auch *alles*—eine *kahle* Antwort! Was hier fehlt ist, z.B., folgendes: Wenn man sich die Antwort ein bisschen betrachtet, so koennte man vermuten, dass—wenn das Fenster des Rechners mehr Dezimalstellen anzeigen koennte—dass auch in der *naechsten* Stelle *wieder* eine 3 erscheinen wuerde. Diese Vermutung ist aber rein phenomenologisch—man hat ueberhaupt keinen *Grund* warum das so sein soll. Andererseits, wenn man aber diese Rechnung ($3 : 4$) mit der Hand durchfuehrt, dann wird man sich sehr bald bewusst *warum* eigentlich immer die 3 in der Antwort aufkommt, und, sogar, warum die Rechnung (im Prinzip, wenigsten) ins Unendliche fuehrt.

Was dieses schlichte Beispiel zeigen soll, ist, dass eine manuelle Rechnung nicht *nur* zu einer Antwort fuehrt, aber auch *Einsicht* in die Antwort mit sich bringen kann. Und, es

kann vorkommen, wie in unserem Beispiel, dass es nicht die *Antwort*, sondern die *Einsicht* ist, die den hoeheren paedagogischen Wert hat.

Diese Beobachtung kann man gewissermassen *generalisieren*:

Im Alltagsleben, oder auch im Werkplatz, ist der *Zweck* einer Rechnung oft ganz anders, als der *Zweck* der selben Rechnung im Schulunterricht. Fuer den Ingeueur, Physiker, oder Tischler ist es zumeist die *Antwort*, die sie oder er braucht, und zwar, die Antwort, in ihrer dezimalen Form—gerade so wie sie der Taschenrechner ihr oder ihm ohne viel Getue liefert. Im Schulunterricht, andererseits, ist die Antwort (und, insbesondere, die dezimale Form der Antwort) oft *nicht* das wirklich Wesentlichste und Interessanteste an einer Rechnung. In der Schule, kommt's oft darauf an, von der Rechnung *selbst* etwas zu lernen—die Antwort ist dann eigentlich Nebensache. Im oben angefuehrten Fall (3:4), ist es der *Rythmus* der Rechnung, den der Schueler, sozusagen, in seinen Fingern und mit seinen Augen erfahren soll.

Und das fuehrt mich noch zu folgendem:

Lehrsatz: Die dezimal Entwicklung einer reellen Zahl x ist schliesslich periodisch, dann, und nur dann, wenn x eine rationale Zahl ist.

Frage: Kennen Sie einen Beweis fuer diesen Lehrsatz, der sich nicht auf den Divisionsalgorithmus stuetzt?

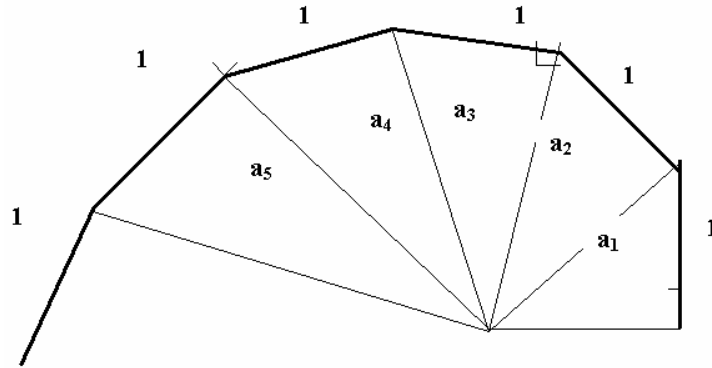
Ich kenne einen solchen nicht.

Die Moral von der obrigen Geschichte ist, meiner Ansicht nach, dass man sehr vorsichtig vorgehen soll, bevor man traditionelle mathematische Themen und Fertigkeiten als "obsolet" bezeichnet, und aus dem Lehrplan herausschmeisst. Und, man muss besonders darauf acht geben, dass solche Aenderungen nicht negative, "unvorhergesehene Konsequenzen" haben. Im Englischen spricht man oft vom "law of unintended consequences", was auch an das beruehmte Sprichwort erinnert: "Don't throw out the baby with the bathwater" (also: "Nicht das Baby mit dem Badewasser herausschmeissen.")

Ich betone aber wieder: Die Tatsache, dass der Divisionsalgorithmus vielleicht noch immer wichtig ist, bedeutet sicherlich *nicht*, dass man die Schueler weiter zwingen soll das Dividieren jahrelang, gedankenlos zu ueben. Ein *bisschen* Praxis und Erfahrung moegen meinen Zwecken genuegen—besonders, wenn man sich die notwendigen Aufgaben *sorgfaeltig* und *gedankenvoll* ausgewaehlt hat.

Jetzt noch ein paar Worte ueber die *Form* der Antworten. Fuer praktische Anwendungen ist, wie gesagt, die Dezimalform einer Zahl zumeist die "Beste". Aber das ist nicht unbedingt der Fall in der Schule:

Beispiel 1: Betrachten Sie bitte folgende Spirale.



Jetzt frage ich Sie: “Welche Angabe der Groessen: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots$ sind “besser”?

$a_1 = \sqrt{1}$		$a_1 = 1.00000$
$a_2 = \sqrt{2}$		$a_2 = 1,4142$
$a_3 = \sqrt{3}$		$a_3 = 1,73205$
$a_4 = \sqrt{4}$	ODER	$a_4 = 2,0000$
$a_5 = \sqrt{5}$		$a_5 = 2.23607$
$a_6 = \sqrt{6}$		$a_6 = 2.44949$
usw.		usw.

Ich denke es sind die Zahlen in der *linken* Spalte, die die meisten Schueler interessant finden werden. Im Gegensatz, schauen die Zahlen in der *rechten* Kolonne, arbitraer und “sinnlos” aus. Anders gesagt: Die Zahlen in der *linken* Spalte offenbaren ein *Muster*—die Zahlen in der *rechten* Kolonne tun das nicht. (Andererseits, will man die Spirale *zeichnen*, dann braucht man natuerlich die dezimal Formen in der *rechten* Spalte.)

Uebrigens, da wir gerade von arbitraeren, sozusagen, “unvertrauten”, Zahlen sprechen, das erinnert mich an folgendes: Vor kurzem erhielt ich von einer Kollegin eine Seite aus einem alten, amerikanischen Lehrbuch aus dem 19ten Jahrhundert, mit einer Liste von mehreren Dezimalzahlen und Bruechen, “die alle Schueler erkennen sollen.” Die Antworten waren nicht gegeben, und ich konnte nicht alle von diesen Zahlen identifizieren. Sie finden die Liste im Abhang 1, und ich lade Sie ein zu versuchen die einzelnen Zahlen zu identifizieren.

Beispiel 2. Man zeigt Schuelern in der Grund- oder Mittelschule folgende Tabelle:

(a)	(b)	(c)	(d)
$2 + 4$	6	$2 * 3$	$2 * 2 + 2$

$2 + 4 + 6$	12	$3 * 4$	$3 * 3 + 3$
$2 + 4 + 6 + 8$	20	$4 * 5$	$4 * 4 + 4$
$2 + 4 + 6 + 8 + 10$	30	$5 * 6$	$5 * 5 + 5$
Usw.	Usw.	usw.	usw.

Welchen von den Spalten (b), (c) oder (d) glauben Sie, dass die Schueler am meisten interessieren?

Zahlgefuehl (Number Sense)

Auch wichtig ist es, dass Schueler, im Laufe der Jahre, ein gutes ‘‘Zahlgefuehl’’ (‘‘number sense’’) entwickeln. Ich zeige Ihnen jetzt ein Exzerpt aus einer Mittelschulaufgabe, die daraufhin zielt, ein solches Zahlgefuehls zu entwickeln.

Es handelt sich hier um eine Beschreibung des Sears Turm. Der Schueler (oder, vielleicht, besser, kleine Gruppen von Schuelern) sollen die angegebenen Zahlen rechts des Textes in die Leerstellen des Textes einsetzen. Was mir bei dieser Aufgabe besonders gefaellt, ist:

- Die Schueler koennen ihre Antworten durch Recherchen am Internet, so wie auch in Lexikons, usw., nachpruefen.
- Man kann das spezifische Thema, ohne grosse Schwierigkeiten, an lokale Umstaende anpassen, z.B, in New York, das Empire State Gebauede, in Wien, der Stefansdom, usw.

Der Sears Turm wurde im Jahre _____ eroeffnet. Man	3
brauchte _____ Jahre ihn zu erbauen, und er kostete	6
\$_____. Die gesamte Bodenflaeche des Gebaedes	16
bezieht _____ Quadratfuss. Der Turm hat ein	1973
Gesamtgewicht von _____ Tonnen, oder _____	222.500
Pfund. Dieses Gewicht ist equivalent zu dem	2.472.222
Gesamtgewicht von etwa _____ Maennern,	150 Millionen
durchschnittlicher Groesse—eine Anzahl, die ungefaehr allen	$4,5 * 10^8$
Maennern, die in der Stadt Chicago wohnen, entspricht. Die	
durchschnittliche Windgeschwindigkeit in Chicago (die	
‘‘Windy City’’) ist _____ Meilen pro Stunde, und das	
durchschnittliche Schwingen dieses massiven Turms im	
Wind entweicht etwa _____ Zoll vom wahren	
Senkrechten	

--	--

Ungefäehr _____ Touristen besuchen jaehrlich die Aussichtsstelle im obersten Stockwerk des Turmes. Das ist gleich der Schueler Anzahl in allen K - 8 Klassen im Staate Illinois. Wenn wir annehmen dass jede Klasse _____ Schueler hat, und dass jede Schule durchschnittlich _____ Klassen hat, dann waere die jaehrliche Anzahl der Besucher der Aussichtsstelle _____ Klassen, oder _____ Schulen pro Jahr.	25 30 $2 \cdot 10^3$ 60.000 1,5 Millionen
<i>[uebersetzt aus dem Englischen von P. Braunfeld]</i>	

Algebra

In der Mittel- und oberen Schule ist, in letzter Zeit, der Benutz der sogenannten *graphing calculators* im Mathematikunterricht sehr populaer geworden. Heutzutage, besitzen die Mehrheit der Schueler, entweder ihren eigenen graphing calculator, oder, mindestens, haben zu einem Zutritt. Der graphing calculators uebt natuerlich auch einen grossen Einfluss auf den Mathematikunterricht aus. Auf der positiven Seite, erwaehne ich folgendes:

- Erstens, ermoeglicht es der graphing calculator, dass man viele Themen der Algebra viel frueher im Lehrplan einfuehren kann als zuvor. Aber noch weit bedeutender ist folgendes: Mit dem graphing calculator, kann man viel mehr Schuelern *ueberhaupt* einen Eintritt in die Algebra bieten. Es ist, in der Tat, ein Hauptziel der Reformbewegung, dass *alle* Schueler in Amerika Algebra studieren sollen. (Allerdings, streitet man sich ueber die Frage, was Algebra eigentlich "wirklich" ist.) Ueberall, hoeht man den Ruf "Algebra fuer Alle" ("Algebra for all!"), und dieser Ruf hat auch seine bedeutenden politische Dimensionen. Denn es war jahrzehntelang Tradition, dass nur *die* Schueler die Bahn zur Hochschule eintreten konnten, die Algebra in der 8. oder 9. Klasse, als Fach waelten. Algebra war, also, de facto, entweder ein Tor, oder eine Sperre am Weg zur Hochschule. Und, traurig zu sagen, fuer Kinder aus armen Verhaeltnissen, oder Kinder aus Minoritaeten, war sie fast immer eine Sperre.
- Zweitens, unterstreicht der graphing calculator die fundamentale Rolle von *Funktionen* in der elementaren Algebra. Dazu, moechte ich Ihnen noch folgendes, merkwuerdiges berichten: Ich habe die Erfahrung gemacht dass es Schuelern sehr imponiert, wenn Sie auf ihrem Rechner eine Drucktaste fuer eine gewisse Funktion

(so wie \sin , \log , \exp , usw.) finden. Warum? Weil—so haben sie's mir erklärt—so eine Funktion muss doch wirklich wichtig und nutzbar sein. Sonst haette der Hersteller diese Funktion bestimmt nicht in den Rechner eingebaut.

- Drittens, macht der graphing calculator so vieles in der Algebra, so *anschaulich*. Insbesondere, wird, z.B., das loesen von einfachen Gleichungen zu einem Kinderspiel. Wiil man, z.B., eine quadratische Gleichung loesen, braucht man ja bloss die gewuenschte Funktionsformel, in den Rechner eingeben—sofort, sieht man im Fenster die graphische Darstellung der Funktion. Um nun die Nullstellen der gegebenen quadratischen Funktion festzustellen, braucht man nur zu schauen wo die Parabel die Abzisse ueberkreuzt. Will man die Loesungen genauer bestimmen, wendet man sich an die zoom und trace Faehigkeiten.

Im Zusammenhag mit dem letzten Punkt, werfen manche Reformer die Frage auf: Warum soll man sich noch immer damit abplagen, quadratische Gleichungen *symbolisch* zu loesen? Und Sie ziehen dann auch den Schluss, dass das symbolische loesen von quadratischen Gleichungen—ein grosses Thema der traditionellen Algebra—auch obsolet ist (genau wie der Divisionsalgorithmus!)

Als Gegenargument, hoeht man dann manchmal: “Ja, aber der graphing calculator gibt doch nur *Approximationen*, nicht die *genauen* Loesungen.” Das stimmt, aber, wie schon frueher gesagt, in der Praxis sind ein paar Dezimalstelllen alles was man braucht.

Meiner Ansicht nach, ist die Situation mit der Algebra gar nicht so anders wie wir's frueher bei der Arithmetik gesehen haben. Das heisst, die traditionelle Algebra spielt eine Rolle im Unterricht, die ganz verschieden ist, von ihrer Rolle in der Praxis.

In meinem eigenen Unterricht fahre ich etwa so fort:

Funktionen, so erklare ich den Schuelern, sind, in gewisser Hinsicht, dem Proteus aehnlich—das war ein mythologisches Wesen, dass sich in manigfaltige Formen umstalten konnte. Die Maschinerie der traditionellen Algebra gibt uns die Moeglichkeit *ein und dieselbe* Funktion, in verschiedene Formen zu verwandeln.

Zum Beispiel, die gegebene Funktion,

$$F(x) = x^2 - 2x - 3. \quad (1)$$

kann man auch so darstellen:

$$F(x) = (x - 3)*(x + 1) \quad (2)$$

Die beiden Ausdruecke, (1) und (2), schauen zwar ganz verschieden aus, stellen aber nur *eine* Funktion dar. Und jetzt kommt das wichtigste: Dieses algebraische Umstalten ist nicht nur ein leeres Spiel, denn die zwei Darstellungen ((1) und (2)) von $F(x)$ offenbaren ganz verschiedene Eigenschaften von $F(x)$:

- Aus (1), koennen wir sofort feststellen wo die Funktion $F(x)$ die y -Achse ueberkreuzt. (Antwort: $F(0) = -3$).
- Andererseits, aus (2), koennen wir sofort die Nullstellen von $F(x)$ ablesen, d.h., wo $F(x)$ die x -Achse schneidet. (Antwort: $x = 3$ und $x = -1$). Bitte bemerken Sie hierbei dass in der Form (1) die Nullstellen ein grosses Geheimnis sind.

Wir koennen jetzt auch noch eine *dritte* Form fuer $F(x)$ finden, indem wir das “Quadrat vollenden”:

$$F(x) = [(x^2 - 2x + 1) - 1] - 3 = (x - 1)^2 - 4 \quad (3)$$

- Aus der letzten Form (3), koennen wir, z., B. den Minimalwert von $F(x)$ ablesen (Antwort: -4 (wenn $x = 1$))
- Ferner, zeigt uns die Form (3), dass man $F(x)$ von der Grundform $y = x^2$ erhalten kann, indem man die Funktion $y = x^2$ eine Einheit nach *rechts*, und 4 Einheiten nach *unten* verschiebt.

Die Algebra soll also fuer den Schueler zu einer Art Detektivspiel werden, das darin besteht, dass man gerade *die* Darstellung einer Funktion $F(x)$ finden muss, die speziell geeignet ist das erwuenschte Geheimniss der Funktion zu offenbaren. Ich denke, dass solche Detektivspiele dem Schueler Spass bieten koennen. Aber, wichtiger, ist, dass der Schueler dabei auch Denkweisen uebt, die auch in nicht-mathematischen Kontexten nuetzlich sind. Zum Beispiel, haben diese Denkweisen eine gewisse Aehnlichkeit zu was man auf englisch, *troubleshooting*, nennt, d.h., die Reihenfolge von Tests, die man anwendet, wenn man, z.B., einen Motor reparieren, oder einen Pazienten heilen, will. Ich meine, dass diese Denkart, bei *exklusiver* Anwendung des graphing calculators, verloren gehen.

Als letztes, moechte ich noch folgendes bemerken:

Ein beachtlicher Vorteil des graphing calculators ist, dass er die Moeglichkeit dem Schueler bietet, nicht nur einzelne, isolierte Funktion zu studieren, sondern auch ganze *Familien* von Funktionen.

Beispielsweise, ist es heutzutage ziemlich typisch, dass man die Schueler dazu auffordert, folgende Familie von Funktionen zu studieren.

:

$$F(x) = mx + b.$$

- Erstens, sollen die Schueler durch Experimente feststellen, dass fuer *alle* Werte von m und b , die Gleichungen eine Gerade bestimmen.
- Zweitens, sollen sie die Rolle von den Parametern m und b untersuchen.

Das ist gewiss eine sinnvolle und interessante Untersuchung. Aber auch hier gibt's mancherlei Fallen, wenn man nicht sehr vorsichtig ist.

Mein Freund und Kollege, Paul Goldenberg, besuchte eine Klasse, die gerade so eine Untersuchung vollendet hatte. Und nun stellte er den Schuelern die folgenden zwei Fragen:

Frage 1: In der Gleichung: $y = mx + b$, welches sind die Variablen, und welches sind die Konstanten?

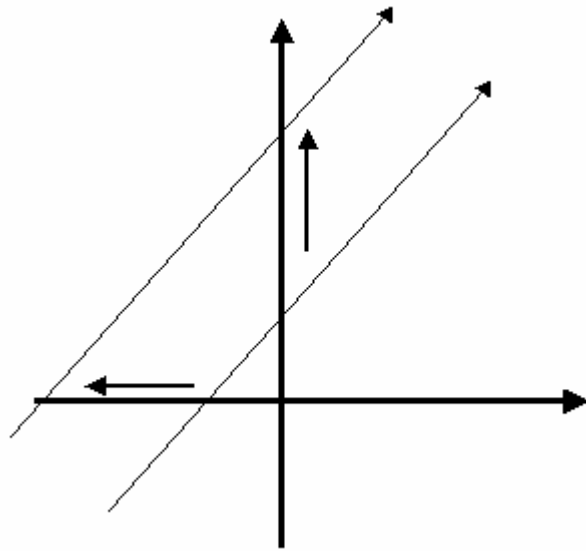
Goldenberg war zuerst erstaunt, als er oft die Antwort bekam: “m und b sind die Variablen, und y und x sind die Konstanten.” Aber, wenn man’s sich ueberlegt, ist diese Antwort gar nicht so sinnlos. Schliesslich, waren’s ja gerade die m und die b, die die Kinder manipuliert hatten. Die Rollen von x und y, andererseits, spielen sich im graphing calculator ausschliesslich hinter den Kulissen ab. Die Kinder hatten oft keinen, oder nur einen sehr schwachen, Begriff welche Rollen y und x in der graphischen Darstellung eigentlich spielten.

Frage 2. Setzen wir jetzt m fest (z.B., = 1), und variieren wir b. Wie veraendern sich die Geraden.

Da kam oefters die Antwort: “Mit steigendem b, verschieben sich die Geraden nach *links!*”

Zuerst, war Goldenberg ganz erstaunt. “Nach *links?*” Man haette sich doch die Antwort: “nach *oben*” erwartet. Aber die Antwort “nach links” stimmt natuerlich auch

Als Mathematiker, wissen wir natuerlich, dass b den Schneidepunkt von der Geraden mit der y-Achse angibt. Mit wachsendem b, *steigt* dieser Punkt entlang der y-Achse, und, daraus schliessen wir, dass auch die Geraden parallel nach *oben* verschoben werden. Aber dieses Urteil ist von unsrerer theoretischen Kentnissen gefaerbt! Rein phenomenologisch betrachtet, verschieben sich die Geraden genau so gut nach *links!*



Abschluss

Ich glaube meine Zeit ist abgelaufen, und ich muss also Schluss machen.

Im Anhang 2, finden Sie mehr Information ueber diese Themen, und auch Allgemeines ueber den Mathematik Schulunterricht in den USA, insb., Listen von von Web und e-mail Adressen, so wie auch eine kurze Bibliographie von Buechern, Reports, und Zeitschriften. Viele von diesen koennen Sie mit links von meiner home page erreichen: <http://www.mste.uiuc.edu/presentations/braunfeld.html>

Anhang 1

Mathematics for the Eighth School Year (David Felmley) 1907 (Bloomington, Illinois)

From the preface: “The aim of arithmetic in the schools is not merely to give expertness in the various arithmetical processes. It is quite as much to lead the student habitually to consider quantitative relations in his environment, to develop his mathematical sense so that he will readily proportion means to ends in the practical affairs of life. The various processes should therefor be drawn from the environment, and the best problems are those that kindle his interest by dealing with the facts of his experience or other school subjects.. The arithmetic class is a place for instruction—not merely for testing or lesson-hearing. The principal use of the textbook is to furnish additional problems after “local problems” are exhausted.

p 55. “[It is suggested that] the following set of arithmetical constants be memorized:

360	365.2422	29 $\frac{1}{2}$
365 $\frac{97}{400}$.5236	365 $\frac{1}{4}$
1.732	.433	11/21
.0078	.7071	.866

Anhang 2

Adressen:

<p>Peter Braunfeld Professor Emeritus of Mathematics Professor Emeritus of Education</p> <p>Department of Mathematics 1409 W. Green Street University of Illinois Urbana, IL 61801 e-mail: pbraunfe@math.uiuc.edu</p>	<p>Paul Goldenberg (for reseasch in learning; curriculum developoment; teacher education) Senior Scientist</p> <p>Education Development Center (EDC) 55 Chapel Street Newton MA 02458 e-mail: pgoldenberg@edc.org</p>
<p>Jerry Becker Proofessor of Education Southern Illinois University Carbondale, Illinois 62901-4610 e-mail: jbecker@siu.edu</p> <p>Eine mailing Liste mit taeglichen e-mail updates von allem was in Didaktik der Mathematik in den USA vorgeht.</p>	<p>Jerry Uhl Professor of Mthematics University of Illinois Urbana, IL e-mail: juhl@math.uiuc.edu (Direktor von: <i>Calculus&Mathematica</i>) (Elementary Analysis, Lineare Algebra, usw. werden mit intensiven Gebrauch von dem software package: <i>Mathematica</i> gelehrt)</p>
<p>Kenneth Travers Professor of Education Director: Office for Mathemsatics, Science, and Technolgy Education (MSTE) Room 341 Armory Building 505 E. Armory Ave. University of Illnois Champaign, IL 61820 e-mail: ktravers@uiuc.edu</p>	<p>George Reese Assistant Director of MSTE (see above) University of Illinois Room 341 Armory Building 505 E. Armory Ave. University of Illnois Champaign, IL 61820 e-mail: g-reese@uiuc.edu</p>

Web-Adressen:

Peter Braunfeld home page: <http://www.math.uiuc.edu/People/braunfeld.html>

Note: das 'P' in "People" muss ein Grossbuchstabe sein!

EDC: <http://www.edc.org>

Buecher, Reports, Zeitschriften, usw.

Einige ausgewaehlte *Lehrbuecher*, die dem Geist der NCTM Standards folgen:

Connected Geometry (fuer high school = Gymnasium)

Author: Education Development Center

Verlag: Everyday Learning Corp., Chicago, IL (2000)

Mathscape (eine Serie fuer Mittelschulen)

Verlag: Creative Publications, Mountain View, CA (1998)

Impact Mathematics (eine Serie fuer Mittelschulen)

Author: Education Developmnet Center

Verlag: Everyday Learning Corp., Chicago, IL (2000)

Reports:

[Diese, und weitere, Materialien finden Sie auch auf der Web-page:

<http://www.mste.uiuc.edu/presentations/braunfeld.html>]

Before It's Too Late

The National Comission on Mathematics and Science Teaching for the 21st Century
Senator John Glenn (Chairman)

Everybody Counts: A Report to the Nation on the Future of Mathematics Education
Mathematical Sciences Education Board (MSEB) and the Board on Mathematical
Sciences, National Research Council (NCRL) (1989)

Principles and Standards for School Mathematics

National Council of Teacher of Mathematics (NCTM) (2000)

A Nation at Risk

National Comission on Education (1983)

Folgendes finden Sie u. A. auch auf der Web page:

www.mste.uiuc.edu/presentations/braunfeld.html

Choosing a Standards-based Mathematics Curriculum
K-12 Mathematics Curriculum Center
Education Development Center, Newton, MA (1998)

Overhead Transparencies

“Einige Gedanken ueber die Rolle von Technologie im Mathematikunterricht.”

Lehrsatz: Die dezimal Entwicklung einer reellen Zahl x ist schliesslich periodisch, dann, und nur dann, wenn x eine rationale Zahl ist.

Frage: Kennen Sie einen Bewies von diesen Satz, der sich nicht auf den Divisionsalgorithmus stuetzt?

Der Sears Turm wurde im Jahre _____	3
eroeffnet. Man brauchte _____	6
Jahre ihn zu erbauen, und er kostete \$ _____.	16
Die gesamte Bodenflaeche des Gebauedes bezieht _____	1973
Quadratfuss. Der Turm hat ein Gesamtgewicht von _____	222.500
Tonnen, oder _____ Pfund.	2.472.222
Dieses Gewicht ist equivalent zu dem Geseamtgewicht von etwa _____	150 Millionen
Maennern durchschnittlicher Groesse, eine Anzahl die ungefaehr allen Maennern, die in der Stadt Chicago wohnen, entspricht. Die durchschnittliche Wind Geschwindigkeit in Chicago (die "Windy City") ist _____	$4,5 * 10^8$
Meilen pro Stunde, und das durchschnittliche Schwingen dieses massiven Turms im Wind entweicht etwa _____ Zoll von seinem wahren Zentrum.	

Ungefäehr _____ Turisten	25
besuchen jaehrlich die	
Aussichtsstelle im obersten	30
Stockwerk des Turmes. Das	
ist gleich der Schueler	$2 \cdot 10^3$
Anzahl in allen K - 8 Klassen	
im Staate Illinois. Wenn wir	60.000
annehmen dass jede Klasse	
_____ Schueler hat, und dass	1,5 Millionen
jede Schule durchschnittlich	
_____ Klassen hat , dann	
waere die jaehrliche Anzahl	
der Besucher der	
Aussichtsstelle _____	
Klassen, oder _____	
Schulen pro Jahr.	

Frage: “Welche Angabe der Groessen: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots$ sind “besser”?

$a_1 = \sqrt{1}$		$a_1 = 1.00000$
$a_2 = \sqrt{2}$		$a_2 = 1,4142$
$a_3 = \sqrt{3}$		$a_3 = 1,73205$
$a_4 = \sqrt{4}$	ODER	$a_4 = 2,0000$
$a_5 = \sqrt{5}$		$a_5 = 2.23607$
$a_6 = \sqrt{6}$		$a_6 = 2.44949$
usw.		usw.

Verwandlungen einer Funktion $F(x)$

$$F(x) = x^2 - 2x - 3. \quad (1)$$

$$F(x) = (x - 3) \cdot (x + 1) \quad (2)$$

Aus (1): Die Funktion $F(x)$ ueberkreuzt die y-Achse
 $F(0) = -3$

Aus (2): die Nullstellen von $F(x)$ (d.h., wo $F(x)$ die x-Achse schneidet) $x = 3$ und $x = -1$

$$\begin{aligned} F(x) &= [(x^2 - 2x + 1) - 1] - 3 \\ &= (x - 1)^2 + 3. \end{aligned} \quad (3)$$

Aus (3): Der Minimalwert von $F(x)$: -4 (wenn $x = 1$)

“Es wird vorgeschlagen, dass Schueler die folgenden
arithmetischen Konstanten auswendig lernen:”

360	365.2422	$29 \frac{1}{2}$
$365 \frac{97}{400}$.5236	$365 \frac{1}{4}$
1.732	.433	$11/21$
.0078	7071	.866

Mathematics for the Eighth School Year (David
Felmley) 1907 (Bloomington, Illinois)

$$y = mx + b$$

